GEOMETRÍA

2 TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES
TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS
SMITH E. VALDEZ

a

b

$n\alpha$

α

En el gráfico, $n \in \mathbb{N}$ y $n>1$.

Se cumple: $a < b < na$



GEOMETRÍA

TRIÁNGULOS

Autor : Julio Orihuela Bastidas

Editor : CUZCANO EDITORIAL E IMPRENTA E.I.R.L.

Composición, diagramación y montaje :

Área de cómputo y publicaciones de Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña

Primera edición : Mayo 2017

Tiraje : 1 000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2017-05447

Obra editada, impresa y distribuida por:
CUZCANO EDITORIAL E IMPRENTA E.I.R.L.
Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña
Teléfono 423-8154



LIMA - PERÚ



El aprendizaje ha sido desde los albores de la humanidad la actividad humana más enriquecedora que ha permitido y garantizado el desarrollo social.

En su afán de comprender y dar solución a los problemas prácticos, el hombre creó un lenguaje artificial como el de las matemáticas que le permitió esclarecer la incognoscible realidad.

Escribir un libro es una labor ardua pero que se reconforta no por los réditos económicos sino por el aporte a la cadena ascendente del conocimiento. Éste no es un texto repetidor de ideas, del cual esta plagado el mercado, sino innovador, verdadero aporte a las ciencias.

He divido este libro de triángulos en dos partes: teoría y problemas. La primera es un enfoque sobre definiciones, clasificación y teoremas sobre el triángulo, completando en la parte final un articulo breve sobre dobleces; y la parte práctica contiene 600 problemas, divididos en resueltos y propuestos, además se subdividen en problemas tipo anual; que son dirigidos a un ciclo básico estudiantes en proceso de formación; problemas del CEPRE-UNI; que son problemas extraídos de sus distintos ciclos, problemas tipo semestral; que van dirigidos a un publico con cierta experiencia; semestral intensivo; que van orientados a afianzar los conocimientos, son problemas de un nivel por encima del examen de admisión; y problemas de repaso, se trata de problemas tipo examen de admisión. Todo ello con el fin de ubicar al estudiante dependiendo del ciclo en el que se encuentra y contribuir de alguna manera a la formación científica del estudiante.

La sugerencia para el lector es intentar previamente los problemas, persistir y ser perseverante. Las soluciones y demostraciones aquí presentadas no son las únicas ni las mejores, solo son sugerencias, como guías para el lector, del cual espero sus observaciones y criticas, las cuales serán bien recibidas.

Julio Orihuela Bastidas

Agradecimiento

- A mis padres por todo su apoyo, así como a mis hermanos y mis sobrinitos que hacen grato el día a día.
- A todo el grupo de Editorial Cuzcano, por su confianza y apoyo.
- A los profesores Luis Saavedra, Renzo Pardo y Jhon Cuya por sus observaciones y sugerencias.
- A todos mis alumnos y ex alumnos, muchos de ellos ya en la universidad en especial para los alumnos del circulo del colegio Prolog, de selección del Colegio Saco Oliveros y del colegio Von Newman de Huánuco.



Indice

Indice

TRIÁNGULOS



Indice

Indice

TRIÁNGULOS

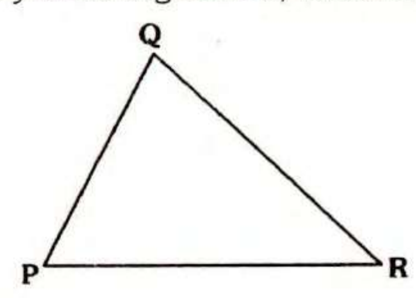
GEOMETRÍA

La geometría es hermosa y algunos de sus teoremas son tan sorprendentes que casi parecen milagrosas. De hecho, el mismo comentario podría hacerse con respecto a toda el área de las Matemáticas, pero la Geometría es única, en el sentido que sus "milagros" son visuales.

J. Martin Isaacs
Geometría Universitaria

DEFINICIÓN[1]

Dados tres puntos no colineales, se define el triángulo como la unión de los segmentos de recta cuyos extremos son dichos puntos. A los puntos no colineales se les denominará vértices y a los segmentos, lados del triángulo.



En el gráfico:

P, Q, R: Puntos no colineales

Elementos:

Vértices: P, Q y R

Lados: $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RP}$

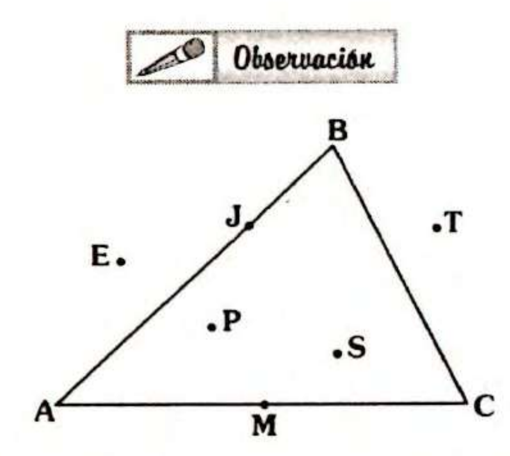
Notación:

ΔPQR : Se lee triángulo de vértices P, Q y R o simplemente triángulo PQR.

Así tenemos:

$$\Delta PQR = \{\overline{PQ} \cup \overline{QR} \cup \overline{RS}\}$$

Observación



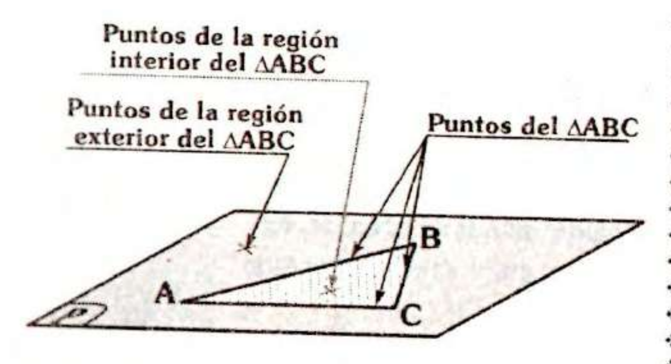
En el gráfico, se tiene el triángulo ABC, *podemos afirmar:*

- P, S, T y E *como no están en los lados, entonces no están en el* ΔABC .
- J y M *están en los lados* AB y AC, *entonces, J y M si están en el* ΔABC .

(1) ver anexos otros tipos de triángulos.

REGIONES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

Al ubicar un triángulo en el plano, se distinguirán tres conjuntos de puntos: puntos de la región interior, que está conformada por los puntos limitados por el triángulo; puntos del triángulo; y los puntos de la región exterior, que está conformada por los puntos del plano que no están en el triángulo ni en la región interior.



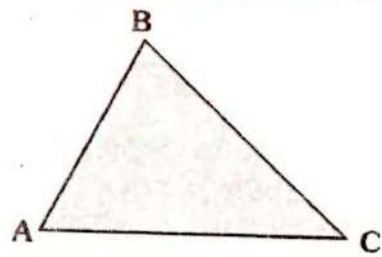
En el gráfico, tenemos el triángulo ABC ubicado en el plano P. Están representadas los conjuntos de puntos.



- *Si ubicamos un punto en el plano P, este punto se ubicará en la región interior, en el triángulo o en la región exterior.*

REGIÓN TRIANGULAR

Se llama región triangular a la unión de un triángulo con su región interior.



Notación:

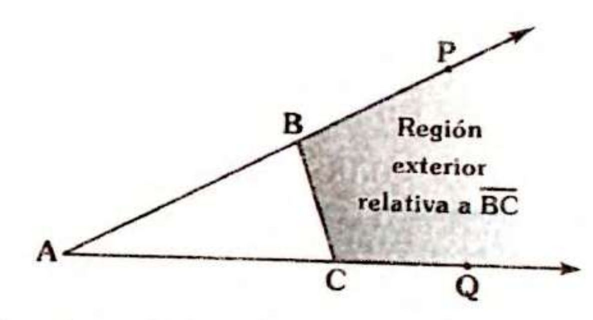
▲ABC: región triangular ABC.

En el gráfico:

$$\blacktriangle ABC = \{\Delta ABC \cup \{\text{reg. interior}\}\}$$

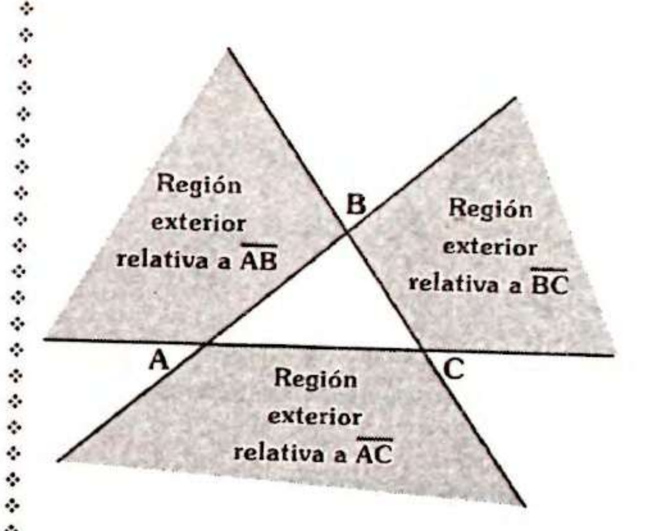
REGIÓN EXTERIOR RELATIVA A UN LADO

Se denominará así a la diferencia de conjuntos de la región interior del ángulo determinado por dos lados y la región triangular.



En el gráfico a la región interior del ∢PAQ, (que es el determinado por los lados AB y AC), se le ha quitado la región triangular ABC, con lo cual tendremos la región exterior relativa a $\overline{BC}$, que está representado por la región sombreada.

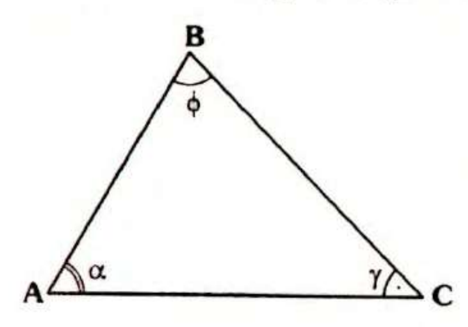
Así tenemos:



ÁNGULO INTERIOR Y EXTERIOR EN EL TRIÁNGULO

Se llama ángulo interior al ángulo determinado por dos lados del triángulo.

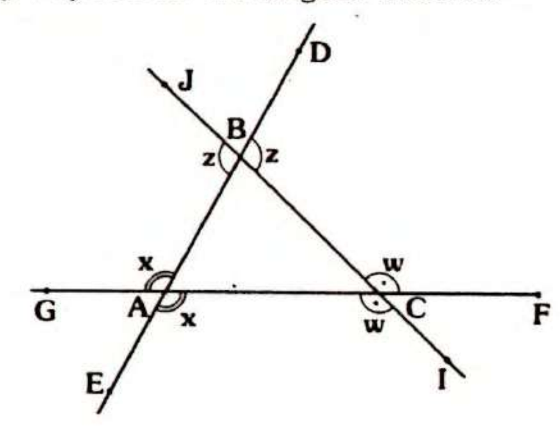
El ángulo exterior es el ángulo suplementario y adyacente del ángulo interior.



En el gráfico:

$$\measuredangle ABC,\ \measuredangle BAC \text{ y } \measuredangle ACB$$

Son los ángulos interiores cuyas medidas son ϕ, α y γ respectivamente.



En el gráfico:

$$\measuredangle GAB,\ \measuredangle EAC,\ \measuredangle ACI,$$
$$\measuredangle FCB,\ \measuredangle CBD \text{ y } \measuredangle ABJ$$

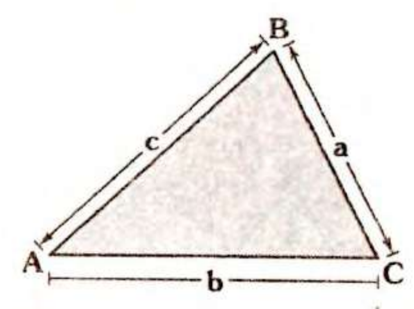
son los ángulo exteriores.

Se puede observar que en cada vértice se determinan dos ángulos exteriores, los cuales son opuestos por el vértice y por teorema son de igual medida.

Así tenemos que las medidas de los ángulos exteriores en el gráfico son **x**, **z** y **w**.

PERÍMETRO DE LA REGIÓN TRIANGULAR

El perímetro[2] de una región triangular es la longitud de su contorno, es decir la suma de las longitudes de sus lados.



En el gráfico:

Los lados del triángulo miden a, b y c entonces el perímetro de la región triangular será: $a+b+c$.

Se representa el perímetro con: 2p, $2p_{\Delta ABC}$ o con una letra minúscula (ℓ por ejemplo)

Así tenemos:

$$2p_{\Delta ABC} = 2p = \ell = a+b+c$$

De las dos primeras notaciones, tenemos:

$$p_{\Delta ABC} = p = \frac{a+b+c}{2}$$

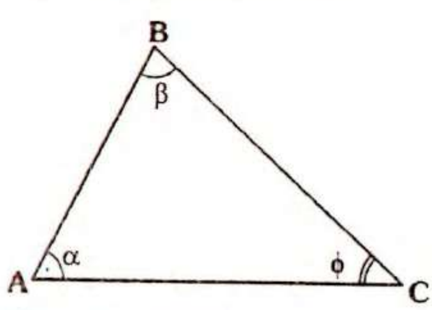
el cual representará el semiperímetro de la región triangular ABC.

(2) ver anexos, se define perímetro de cualquier región plana.

TEOREMAS FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO

TEOREMA 1

La suma de medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

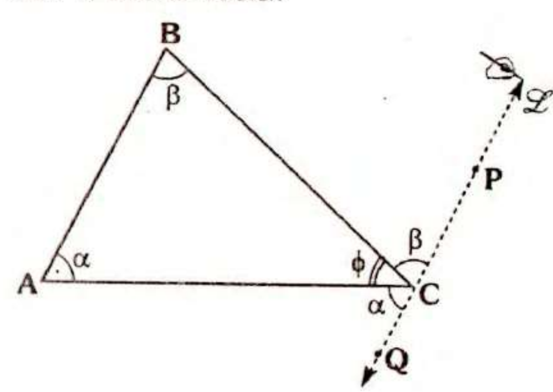


En el gráfico, se cumple:

$$\alpha+\beta+\phi=180°$$

Demostración

- Usaremos un equivalente al quinto postulado de Euclides[3], el cual nos garantiza que por un punto exterior a una recta se puede trazar una recta paralela y solo una a dicha recta.



- Por C trazamos $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, ello esta garantizado por el postulado V, de Euclides[3].
- Por ángulos alternos internos:

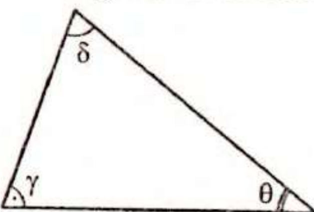
$$m\measuredangle ACQ=\alpha \quad y \quad m\measuredangle BCP=\beta$$

- En C, tenemos:

$$\alpha+\phi+\beta=180°$$

Corolario:

La suma de medidas de dos ángulos interiores en el triángulo, es menor que 180°.

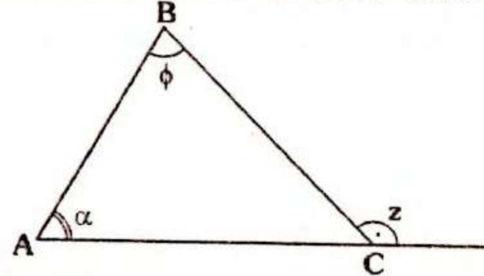


En el gráfico, se cumple:

$$\delta+\theta<180°$$
$$\gamma+\theta<180°$$
$$\delta+\gamma<180°$$

TEOREMA 2

La medida de un ángulo exterior en un vértice es igual a la suma de medidas de los ángulos interiores en los otros vértices.

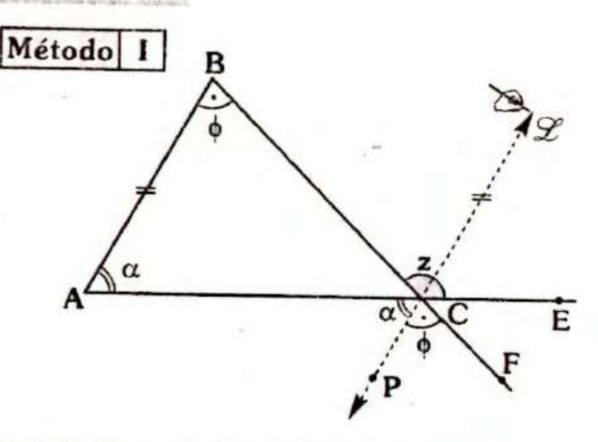


En el gráfico, se cumple:

$$z=\alpha+\phi$$

Demostración:

Método I



(3) En la sección de anexos se da los postulados de Euclides, así como otras posibilidades de la demostración.

- Por C, se traza la recta $\mathscr{L}$, paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.
- Por ángulos alternos internos:

$$m\measuredangle PCA = \alpha$$

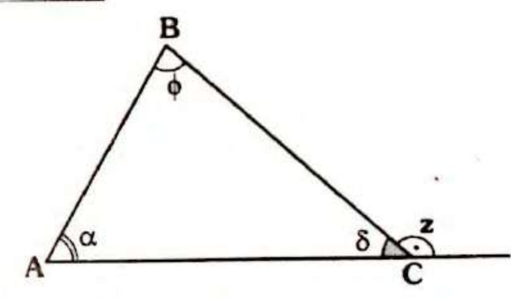
- Por ángulos correspondientes:

$$m\measuredangle FCP = \phi$$

- Por ángulos opuestos por el vértice:

$$z = \alpha + \phi$$

Método II



- Por teorema 1:

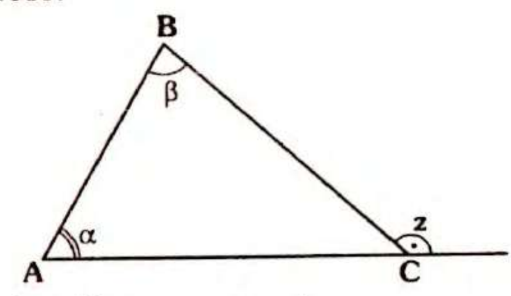
$$\alpha + \delta + \phi = 180° \quad \dots \text{(I)}$$

- Pero: $z + \delta = 180° \quad \dots \text{(II)}$
- De (I) y (II): $z + \cancel{\delta} = \alpha + \cancel{\delta} + \phi$

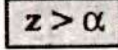
$$\therefore \; z = \alpha + \phi$$

Corolario:

La medida del ángulo exterior en un vértice es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos interiores en los otros vértices.



En el gráfico, se cumple:

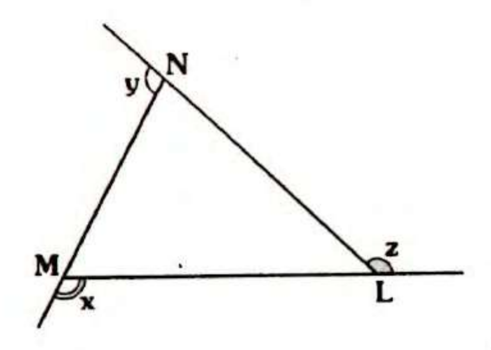


$$\boxed{z > \alpha}$$

$$\boxed{z > \beta}$$

TEOREMA 3

La suma de las medidas de los ángulos exteriores, considerando uno por cada vértice, es 360°.

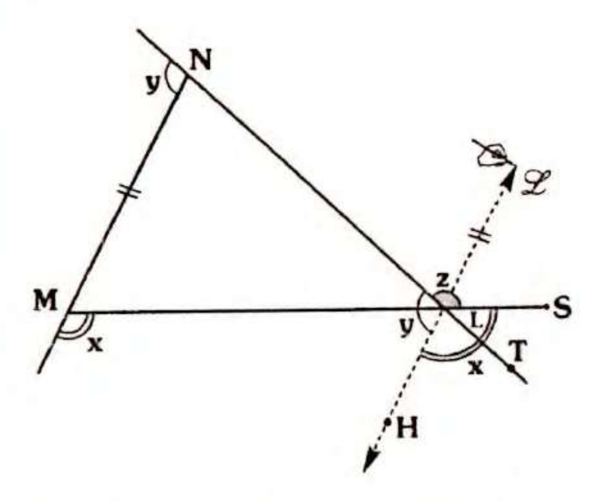


En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{x + y + z = 360°}$$

Demostración:

Método I



- Por el vértice L, trazamos la recta $\mathscr{L}$ paralela a $\overleftrightarrow{MN}$.
- Por ángulos correspondientes:

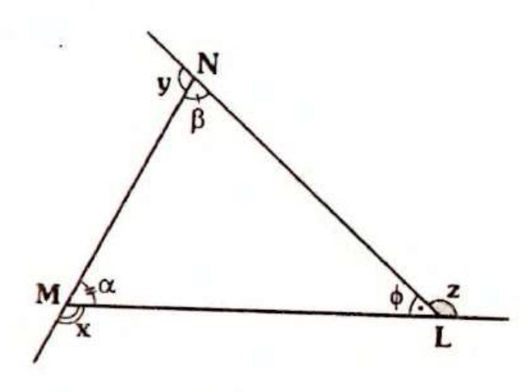
$$m\measuredangle SLH = x$$

$$m\measuredangle HLN = y$$

- En L, se puede afirmar:

$$x + y + z = 360°$$

Método II



- Por el teorema 2, del cálculo del ángulo exterior:

$$x = \beta + \phi \quad \dots (a)$$

$$y = \alpha + \phi \quad \dots (b)$$

$$z = \alpha + \beta \quad \dots (c)$$

- Sumando (a), (b) y (c):

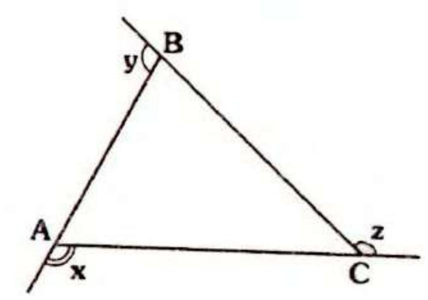
$$x + y + z = 2(\alpha + \beta + \phi)$$

- Como: $\alpha + \beta + \varphi = 180°$

$$\therefore\ x + y + z = 360°$$

Corolario:

La suma de medidas de dos ángulos exteriores (en diferentes vértices) es menor a 360°.



En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{x + y < 360°}$$

$$\boxed{y + z < 360°}$$

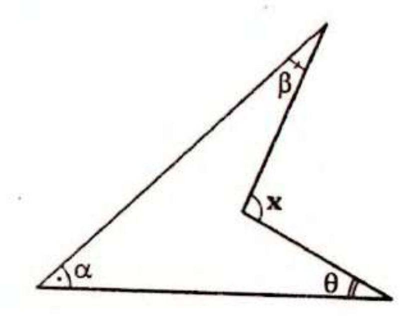
$$\boxed{z + x < 360°}$$

TEOREMAS ADICIONALES

A continuación indicaremos algunas teoremas sobre las relaciones de medidas angulares en ciertas figuras, dichos teoremas se deducen de los teoremas fundamentales. Por su uso frecuente en la resolución de ejercicios, es importante conocerlas.

En algunos casos se generaliza.

TEOREMA 4

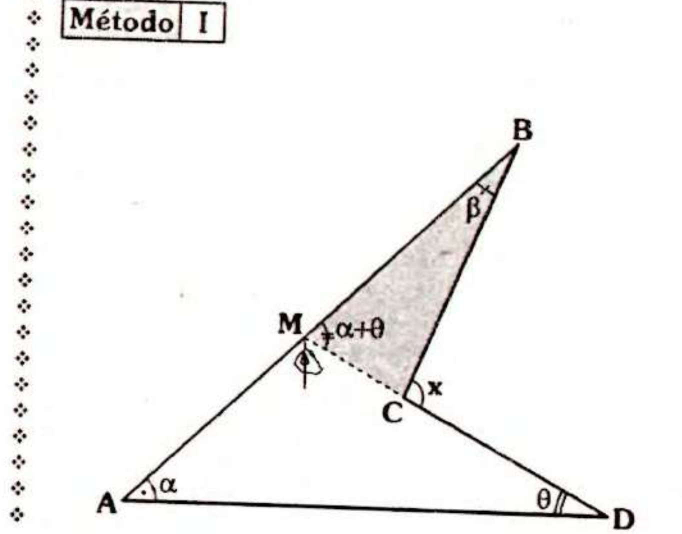


En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{x = \alpha + \beta + \theta}$$

Demostración:

Método I

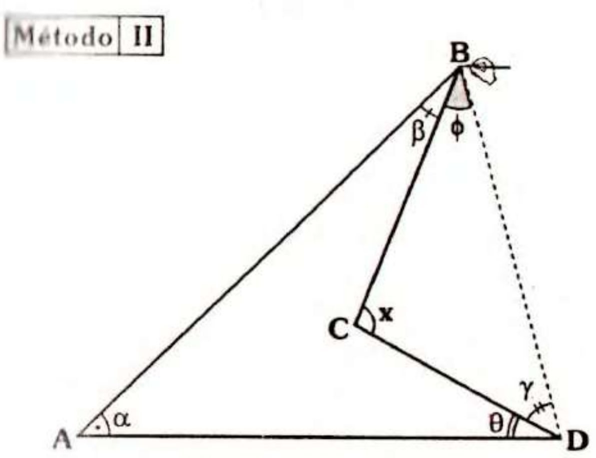


- Se prolonga $\overline{DC}$ hasta que corte a $\overline{AB}$ en M.
- Por teorema (*medida del ∢ exterior*)

$$\Delta AMD : m\measuredangle BMC = \alpha + \theta$$

$$\Delta CMB : x = \alpha + \theta + \beta$$

Método II



- Se traza $\overline{BD}$.
- Por teorema 1:

$$\Delta BCD : x + \phi + \gamma = 180° \quad \ldots \text{(I)}$$

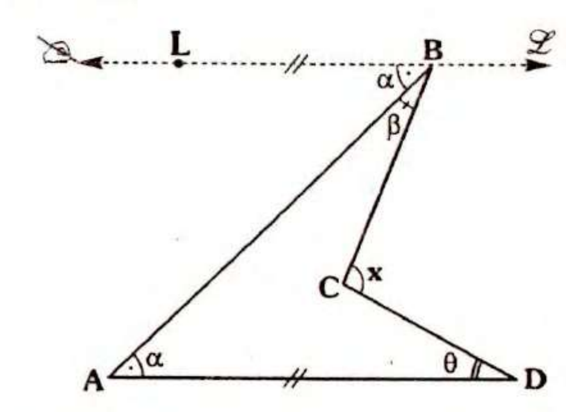
$$\Delta ABD : \alpha + \beta + \phi + \gamma + \theta = 180° \quad \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II):

$$x + \phi + \gamma = \alpha + \beta + \phi + \gamma + \theta$$

$$\therefore\ x = \alpha + \beta + \theta$$

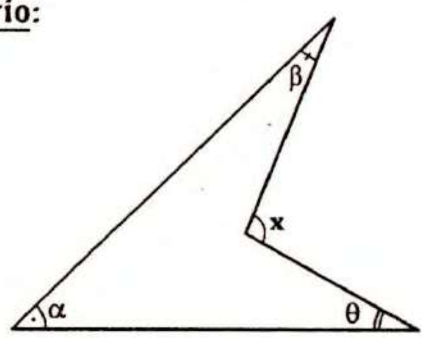
Método III



- Por B trazamos la recta $\mathscr{L}$ paralela a $\overline{AD}$.
- Por $\measuredangle_s$ alternos internos: $m\measuredangle LBA = \alpha$
- Por teorema sobre paralelas:

$$x = \alpha + \beta + \theta$$

Corolario:



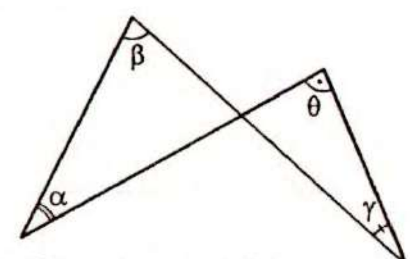
En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{x > \alpha\ ;\ x > \beta\ ;\ x > \theta}$$

También:

$$\boxed{x > \theta + \beta\ ;\ x > \beta + \alpha\ ;\ x > \theta + \alpha}$$

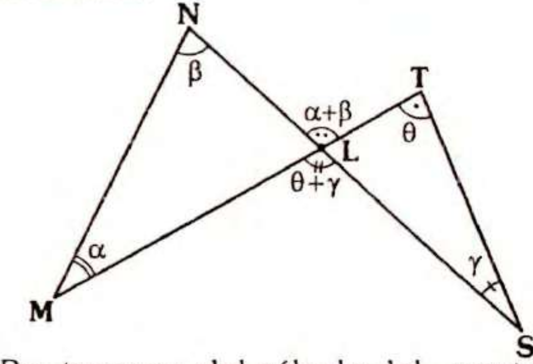
TEOREMA 5



En el gráfico, se cumple:

$$\boxed{\alpha + \beta = \theta + \gamma}$$

Demostración:



- Por teorema del cálculo del ∢ exterior:

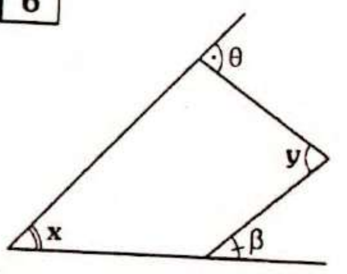
$$\Delta MNL : m\measuredangle NLT = \alpha + \beta$$

$$\Delta LTS : m\measuredangle MLS = \theta + \gamma$$

- Por ∢ opuestos por el vértice:

$$\alpha + \beta = \theta + \gamma$$

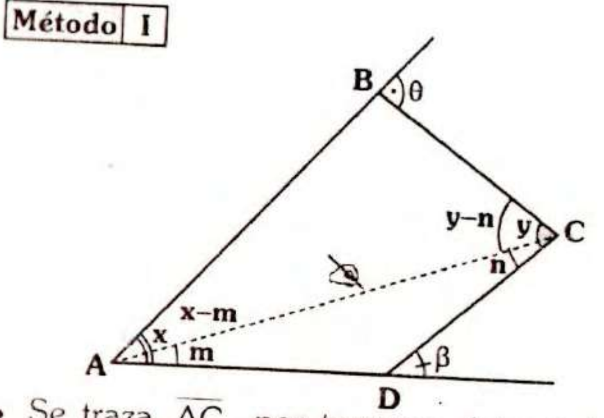
TEOREMA 6



En el gráfico, se cumple: $x + y = \theta + \beta$

Demostración

Método I



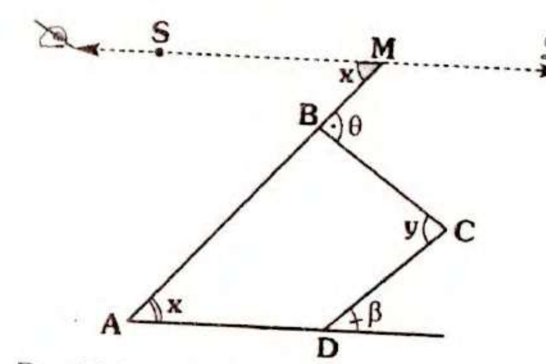
- Se traza $\overline{AC}$, por teorema del estudio del ∢ exterior

$\Delta ACD: m + n = \beta$ ... (I)

$\Delta ABC: x - m + y - n = \theta$ ... (II)

- Sumando (I) y (II): $x + y = \theta + \beta$

Método II

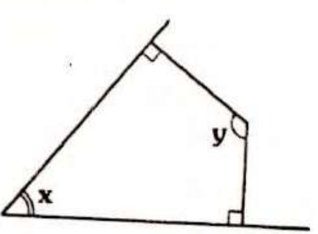


- Por M (que se ubica en la prolongación de $\overline{AB}$), se traza $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overleftrightarrow{AD}$.
- Por ∢s alternos internos: $m\measuredangle AMS = x$
- Por teorema de ángulos entre paralelas:

$x + y = \theta + \beta$

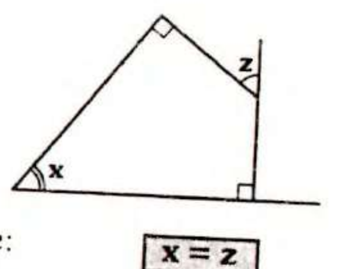
Corolario 1:

Del gráfico anterior, si $\theta = \beta = 90°$, la nueva figura quedará así:



Se cumple: $x + y = 180°$

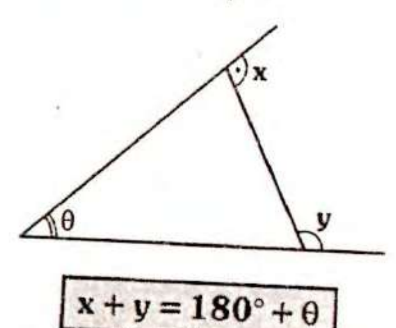
Corolario 2:



Se cumple: $x = z$

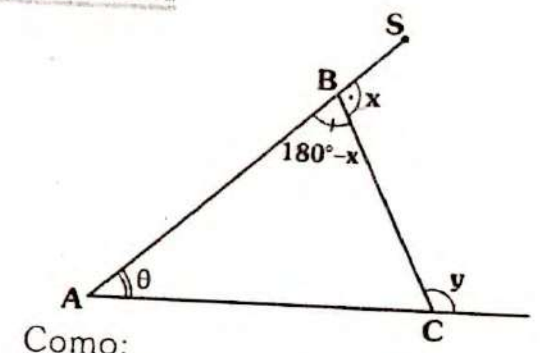
TEOREMA 7

En el gráfico, se cumple:



$x + y = 180° + \theta$

Demostración:



- Como:

$m\measuredangle SBC = x \Rightarrow m\measuredangle ABC = 180° - x$

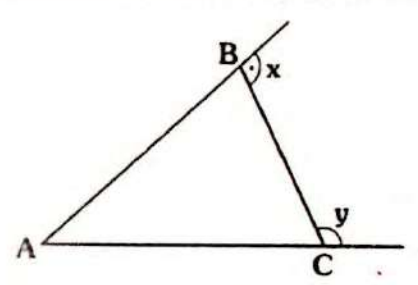
- Por teorema del cálculo del ∢ exterior:

$$y = \theta + 180° - x$$

$$\therefore\ x + y = 180° + \theta$$

Corolario:

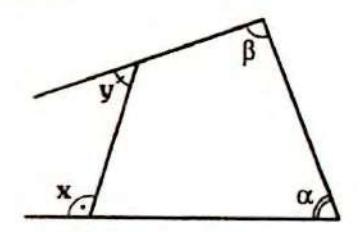
De lo anterior se deduce que la suma de medidas de dos ángulos exteriores (uno por vértice) es mayor a 180°, y considerando el corolario del teorema 3.



En el gráfico, se cumple:

$$180° < x + y < 360°$$

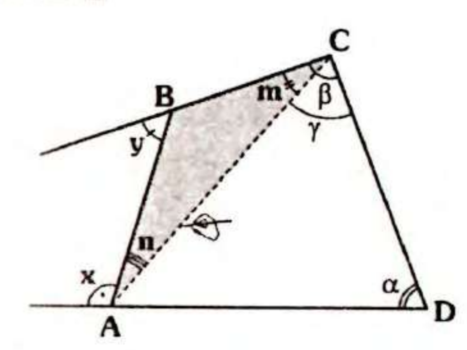
TEOREMA 8



En el gráfico, se cumple:

$$x + y = \alpha + \beta$$

Demostración:



- Se traza $\overline{AC}$, luego se tiene: $\beta = m + \gamma$
- Por cálculo del ángulo exterior en:

$$\Delta ABC:\ \ y = n + m \qquad \ldots (I)$$

$$\Delta ACD:\ \ x + n = \alpha + \gamma \qquad \ldots (II)$$

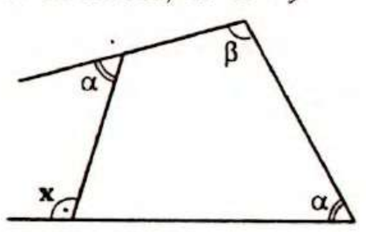
- Sumando (I) y (II):

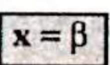
$$x + \cancel{n} + y = \cancel{n} + \alpha + \underbrace{(m + \gamma)}_{\beta}$$

$$\therefore\ x + y = \alpha + \beta$$

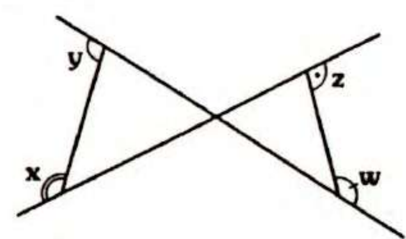
Corolario:

Del gráfico anterior, si $\alpha = y$



Se cumple: 

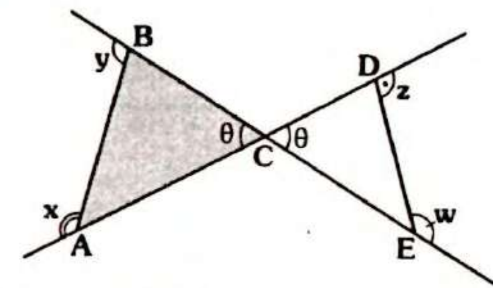
TEOREMA 9



En el gráfico, se cumple:

$$x + y = z + w$$

Demostración



- Por teorema 7, en:

$$\Delta ABC:\ \ x + y = 180° + \theta$$

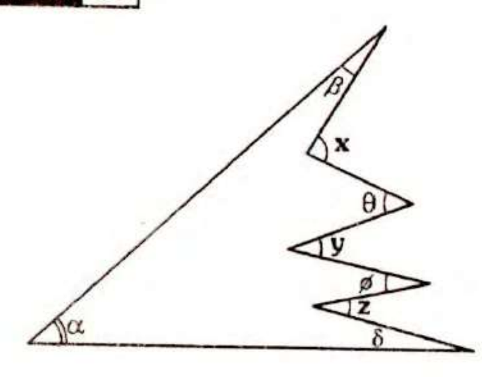
$$\Delta DCE:\ \ z + w = 180° + \theta$$

$$\therefore\ x + y = z + w$$

GENERALIZACIÓN DE ALGUNOS TEOREMAS

Los siguientes teoremas que se indicarán, se desprenden de los teoremas 4, 5 y 6.

TEOREMA 10

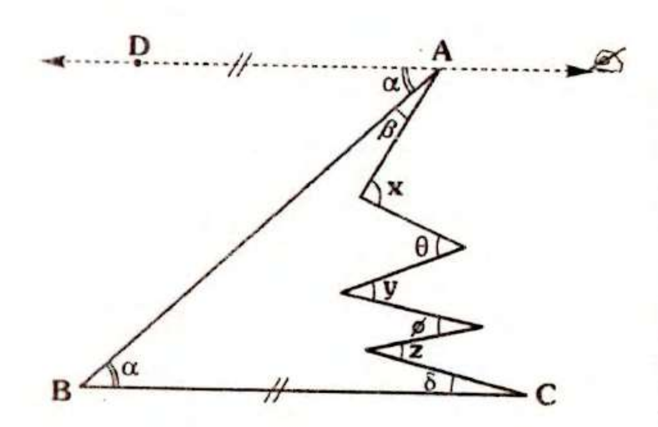


En el gráfico, se cumple:

$$x+y+z=\alpha+\beta+\theta+\phi+\delta$$

Demostración

Para realizar esta demostración se podría pensar en buscar las figuras indicadas en los teoremas 4 ó 6. Pero optaremos por la siguiente.



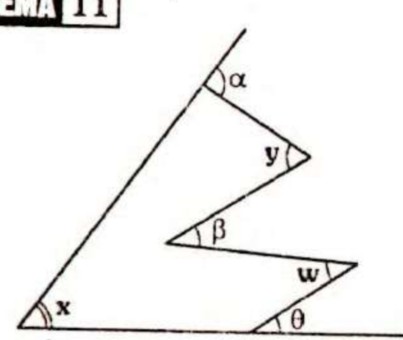
- Se traza por A, la recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$. Por ángulos alternos internos:

$$m\sphericalangle BAD=\alpha$$

- Por teorema de ángulos entre paralelas:

$$\Sigma: x+y+z=\alpha+\beta+\theta+\phi+\delta$$

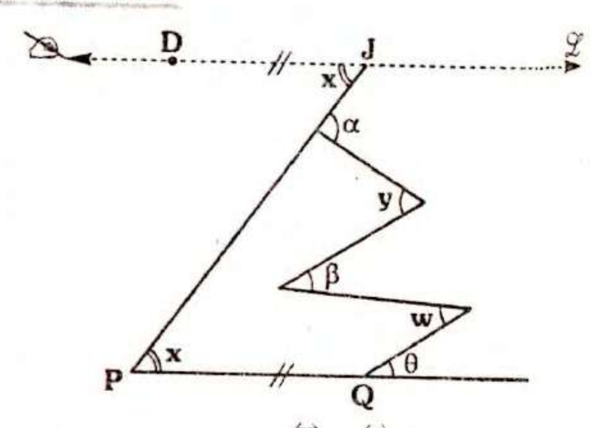
TEOREMA 11



En el gráfico, se cumple:

$$x+y+w=\alpha+\beta+\theta$$

Demostración



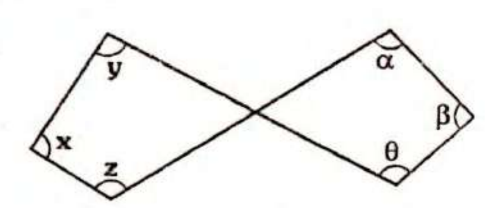
- Por J, se traza $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} \,//\, \overleftrightarrow{PQ}$.
- Por ángulos alternos internos, se cumple:

$$m\sphericalangle DJP=x$$

- Por teorema de ángulos entre paralelas:

$$\Sigma: x+y+w=\alpha+\beta+\theta$$

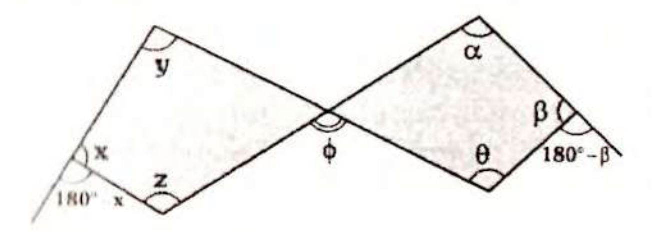
TEOREMA 12



En el gráfico, se cumple:

$$x+y+z=\alpha+\beta+\theta$$

emostración



En cada una de las regiones sombreadas, por teorema 6.

- $y+z=\phi+180°-x$

$\Rightarrow y+z+x=\phi+180° \quad \ldots (I)$

- $\alpha+\theta=\phi+180°-\beta$

$\Rightarrow \alpha+\theta+\beta=\phi+180° \quad \ldots (II)$

De (I) y (II): $x+y+z=\alpha+\theta+\beta$

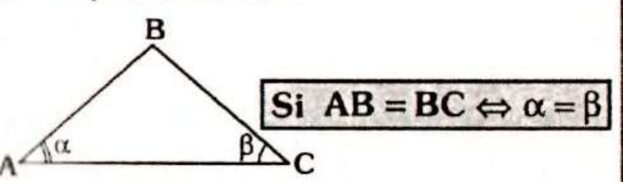
TEOREMA DE LA CORRESPONDENCIA Y EXISTENCIA

Nota

En esta publicación usaremos el siguiente teorema (sin demostración)

TEOREMA 13

"Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces los ángulos opuestos a dichos lados tienen igual medida y recíprocamente".

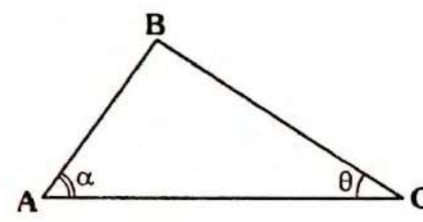


Si $AB=BC \Leftrightarrow \alpha=\beta$

La demostración se realizará la publicación de congruencia de triángulos.

TEOREMA 14 *(teorema de la correspondencia)*

En todo triángulo al lado de mayor longitud se opone el ángulo de mayor medida y recíprocamente.



En el gráfico:

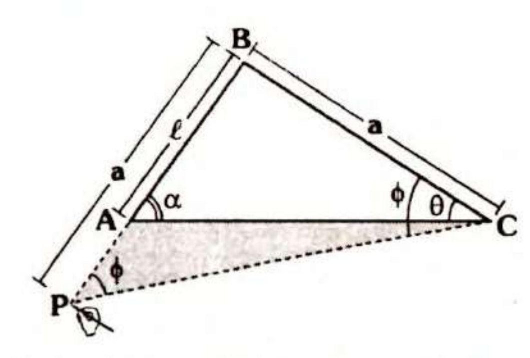
Si $BC>AB \Leftrightarrow \alpha>\theta$

Demostración:

Debido al carácter recíproco la demostración constará de dos partes:

Parte I

- Si $BC>AB \Rightarrow \alpha>\theta$



- Como por condición $BC>AB$, es decir $a>\ell$, se prolonga $\overline{BA}$ hasta P, tal que $PB=a$.
- En ΔPBC, como $PB=BC$, por teorema 13:

$$m\measuredangle BPC=m\measuredangle BCP=\phi$$

- Con lo cual tendremos:

$$\phi>\theta \quad \ldots (I)$$

- En ΔAPC por corolario del teorema del $\measuredangle$ exterior:

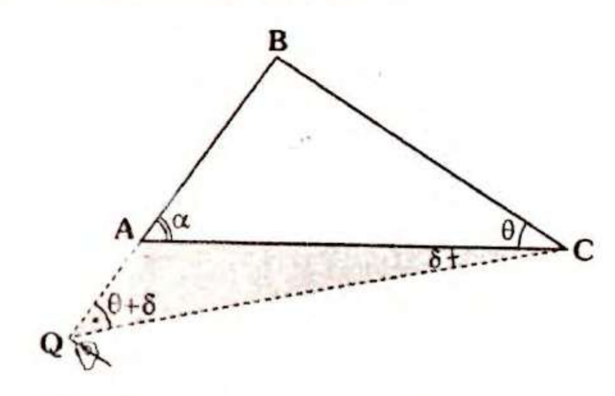
$$\alpha>\phi \quad \ldots (II)$$

- De (II) y (I):

$$\alpha > \phi \text{ y } \phi > \theta \Rightarrow \alpha > \theta$$

Parte II ($\Leftarrow$)

- Si $\alpha > \theta \Rightarrow BC > AB$



- Como $\alpha > \theta \Rightarrow \alpha = \theta + 2\delta$
(Se ha considerado convenientemente 2δ)
- Se prolonga $\overline{BA}$ hasta Q, tal que $m\measuredangle ACQ = \delta$
- En ΔAQC, por ángulo exterior:

$$\alpha = \delta + m\measuredangle AQC$$

$$\theta + 2\delta = \delta + m\measuredangle AQC$$

$$\Rightarrow \ m\measuredangle AQC = \theta + \delta$$

- Como:

$$m\measuredangle BQC = m\measuredangle ACB = \theta + \delta$$

- Por teorema 13:

$$QB = BC$$

- Pero:

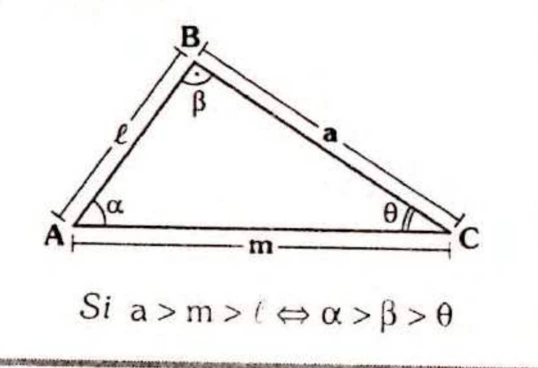
$$QB = QA + AB$$

$$\Rightarrow BC = QA + AB$$

$$\therefore BC > AB$$

 **Observación**

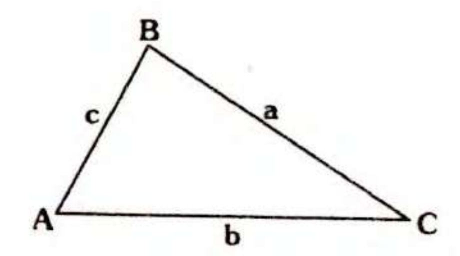
Con lo anterior queda probado que a mayor "lado", se opone mayor "ángulo", para los tres lados y ángulos quedará asi:



Si $a > m > \ell \Leftrightarrow \alpha > \beta > \theta$

TEOREMA 15

En todo triángulo la longitud de cualquier lado es menor que la suma de longitudes de los otros dos lados.



En el gráfico, se cumple:

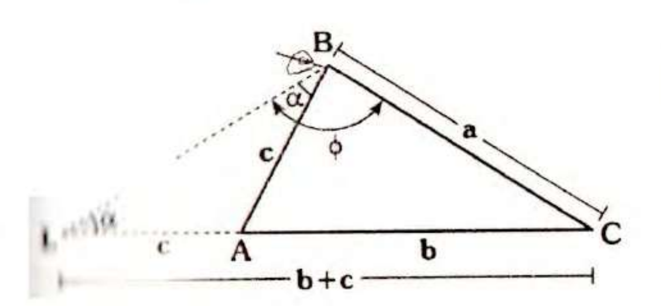
$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

Demostración

- Será suficiente demostrar para uno de los lados, ya que en forma análoga se demostrará para los otros dos.



- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta L, tal que $AL = c$, entonces $LC = b + c$
- Como:

$$AL = AB \Rightarrow m\measuredangle ALB = m\measuredangle ABL = \alpha$$

- En $\triangle LBC$, se tiene:

$$\phi > \alpha$$

- Por teorema de la correspondencia:

$$b + c > a$$

$$\Rightarrow \quad a < b + c$$

- Con el mismo criterio se prueba:

$$b < a + c \quad y$$

$$c < a + b$$

- De donde se tiene:

$$b - c < a \quad y$$

$$c - b < a$$

- Es decir:

$$|b - c| < a$$

Nota

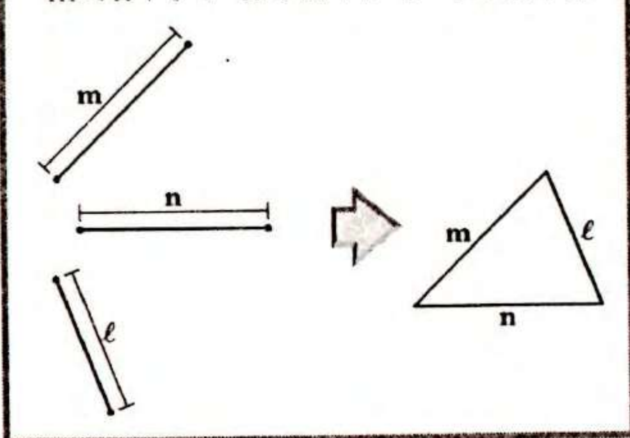
- *En la resolución de ejercicios se suele plantear para uno de los lados por ejemplo, el lado que mide a:*

$$|b - c| < a < b + c$$

Cuando se conozca la relación de orden entre b y c se puede obviar el valor absoluto, planteando la diferencia del mayor con el menor.

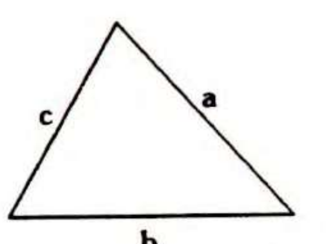
- *Dados tres segmentos de longitudes m, n y ℓ, para que se pueda formar con ellos en triángulo, deben cumplir:*

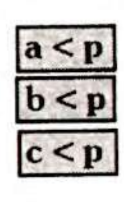
$$m < n + \ell \ , \quad n < m + \ell \quad y \quad \ell < m + n$$



Corolario

Del teorema de existencia se deduce:





Donde: $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

Prueba: $a < b + c \Rightarrow 2a < \underbrace{a + b + c}_{2p}$

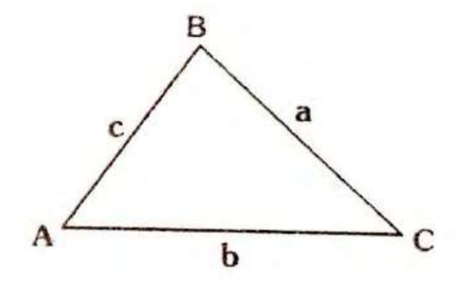
$$\Rightarrow \boxed{a < p}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

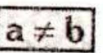
SEGÚN LAS LONGITUDES DE SUS LADOS

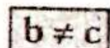
TRIÁNGULO ESCALENO

Es aquel triángulo que tiene todos sus lados de diferente longitud.



En el gráfico, si el ΔABC es escaleno se cumple:



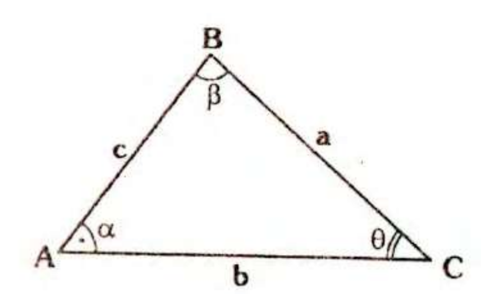


$$c \neq a$$

TEOREMA 16

Las medidas de los ángulos interiores en un triángulo escaleno son todas diferentes.

Demostración



- Como el ΔABC es escaleno, sus lados son todos diferentes, supongamos que estén ordenados así:

$$a > b > c$$

- Por teorema de la correspondencia:

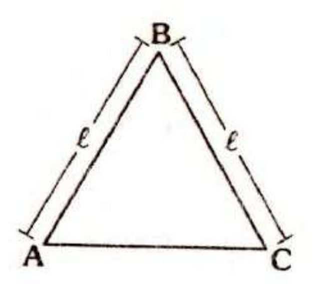
$$\alpha > \beta > \theta$$

- Es decir:

$$\alpha \neq \beta\ , \ \beta \neq \theta \ \text{ y } \ \alpha \neq \theta$$

TRIÁNGULO ISÓSCELES

Es aquel triángulo que tiene dos lados de igual longitud, al tercer lado se le denomina base.

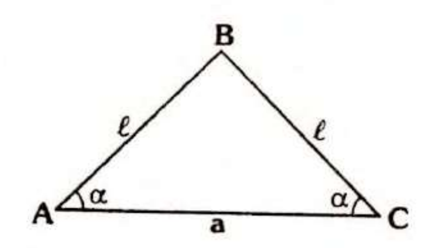


- En el gráfico, el ΔABC es isósceles de base AC, se cumple:

$$AB = BC$$

TEOREMA 17

Los ángulos determinados por la base con cada uno de los otros lados son agudos.



- Por teorema 13
- Como $AB = BC \Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA$
- Por corolario del teorema 1:

$$\alpha + \alpha < 180°$$

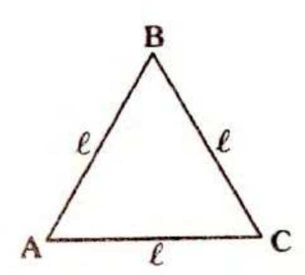
$$\Rightarrow \boxed{\alpha < 90°}$$

- Es decir: $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle BCA$ son agudos
- Además, por teorema de existencia

$$\boxed{a < 2\ell}$$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO

Es aquel triángulo que tiene todos sus lados de igual longitud. También se le llama triángulo regular.



- En el gráfico, si el triángulo es equilátero se cumple:

$$\boxed{AB = BC = AC}$$

TEOREMA 18

Los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden 60°.

La demostración es aplicación directa del teorema 13 y 1.

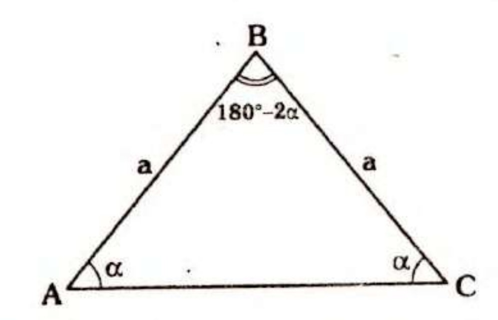
Observaciones

- *Si se conoce la medida de uno de los ángulos en un triángulo isósceles se pueden calcular los otros dos.*

Si $AB = BC$ *y* $m\measuredangle BAC = \alpha$

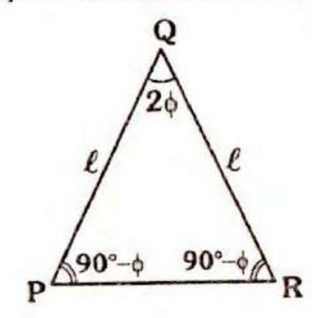
Se cumple: $m\measuredangle ACB = \alpha$

$m\measuredangle ABC = 180° - 2\alpha$



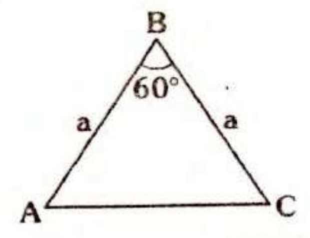
Si $PQ = QR$ *y* $m\measuredangle PQR = 2\phi$

Se cumple: $m\measuredangle QPR = m\measuredangle QRP = 90° - \phi$



- *Si en un triángulo tiene dos lados de igual longitud y un ángulo interior mide 60°, entonces el triángulo es equilátero. Se presentan dos casos:*

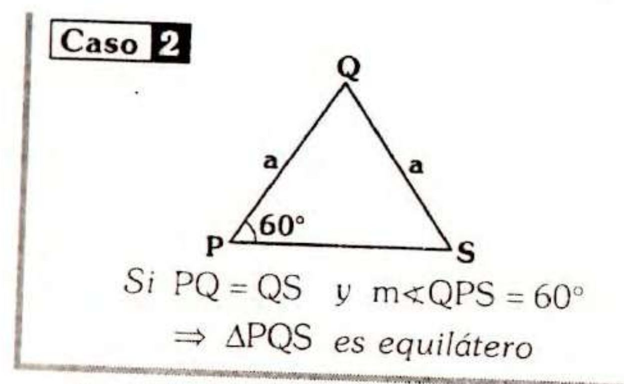
Caso 1



Si $AB = BC$ *y* $m\measuredangle ABC = 60°$

$\Rightarrow \Delta ABC$ *es equilátero*

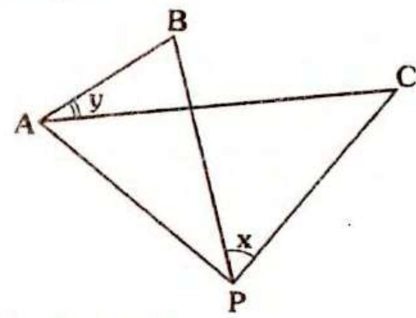
Caso 2



Si $PQ = QS$ *y* $m\sphericalangle QPS = 60°$

$\Rightarrow \Delta PQS$ *es equilátero*

- Esta última observación lo encontraremos en muchos ejercicios, en el capítulo de puntos notables se estudia con más detalle, aquí lo analizaremos desde el tema de triángulos.

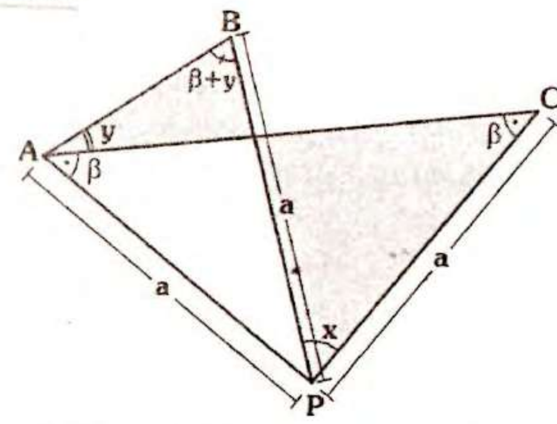


Si $PA = PB = PC$

Se cumple:

$$\boxed{x = 2y}$$

Prueba:

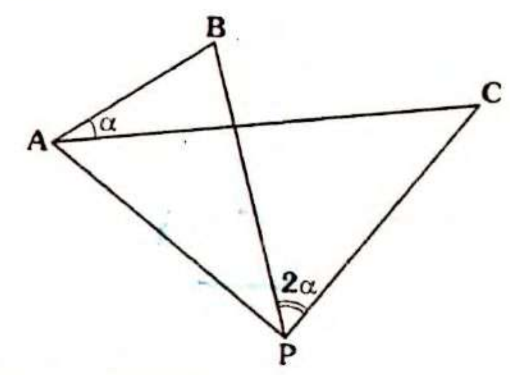


ΔPAC y ΔPAB : isósceles en la región sombreada.

$$x + \beta = \beta + 2y$$

$$\therefore x = 2y$$

- Recíproco



Si: $PB = PC$ y

$m\sphericalangle BPC = 2(m\sphericalangle BAC)$

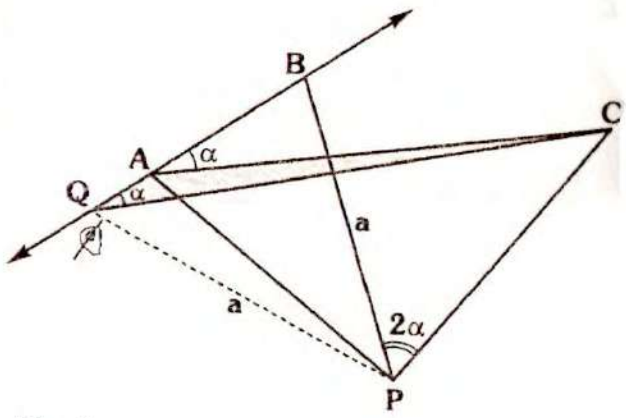
Se cumple: $\boxed{PA = PB}$

Prueba:

- Para prueba usaremos el método del absurdo. Desde P se traza $\overline{PQ}$ tal que $PQ = PB$, donde $Q \in \overleftrightarrow{AB}$ para Q hay dos posibilidades

$$Q = A \quad \text{o} \quad Q \neq A$$

Si $Q \neq A$, se tiene:



Por lo anterior: $m\sphericalangle CQA = \alpha$

Se tiene: $m\sphericalangle CQA = m\sphericalangle CAB$, lo cual es absurdo.

Otra posibilidad es que Q esté entre A y B, lo cual en forma análoga de deduce que es absurdo.

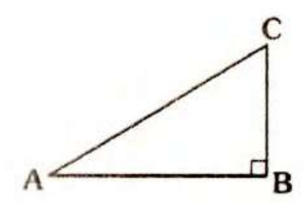
Entonces la única posibilidad es:

$$Q = A$$

POR LAS MEDIDAS ANGULARES

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Es aquel triángulo en el que un ángulo interior mide 90°.



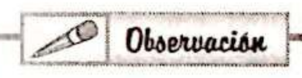
- En el gráfico:

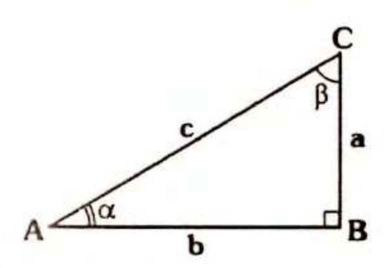
$$m\sphericalangle ABC = 90°$$

Entonces el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

Catetos: $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

Hipotenusa: $\overline{AC}$





En el gráfico se cumple:

Por teorema 1:

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

$$\Rightarrow \alpha < 90° \text{ y } \beta < 90°$$

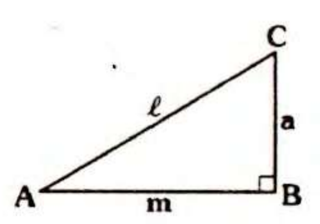
Por teorema de la correspondencia:

$$\boxed{c > a} \text{ y } \boxed{c > b}$$



Un segundo y último teorema que utilizaremos sin demostración (ella se realizará en el tema de relaciones métricas) es el siguiente.

TEOREMA 19 (Teorema de Pitágoras)



En el gráfico, se cumple:

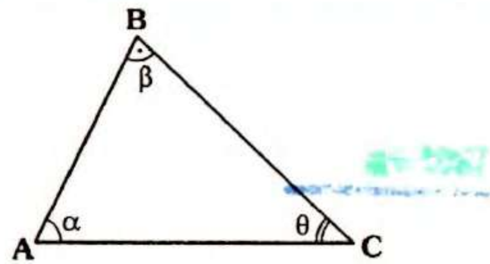
$$\boxed{a^2 + m^2 = \ell^2}$$

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Es aquel triángulo en el que ningún ángulo interior mide 90°. Debido a está característica, pueden ser:

a. TRIÁNGULO ACUTÁNGULO

Es aquel triángulo en el que las medidas de sus ángulos interiores son menores a 90°.



- Si $\triangle ABC$ es acutángulo, se cumple:

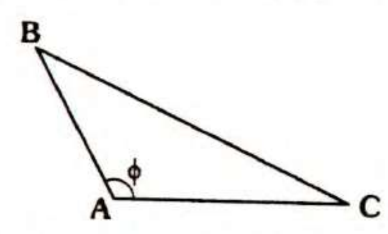
$$\boxed{\alpha < 90°}$$

$$\boxed{\theta < 90°}$$

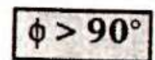
$$\boxed{\beta < 90°}$$

b. TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO

Es aquel triángulo en el que uno de sus ángulos interiores mide más de 90°.

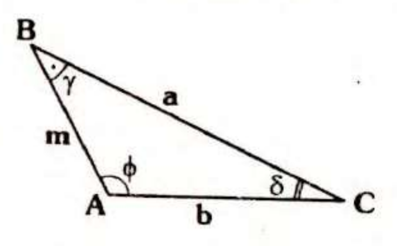


- En el gráfico, si el ΔABC es obtusángulo (obtuso en A), se cumple:



$$\phi > 90°$$





En el gráfico si: $\phi > 90°$

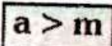
$$\Rightarrow \gamma + \delta < 90°$$

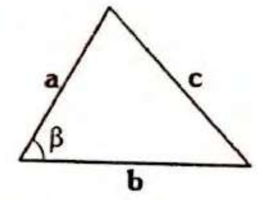
$$\Rightarrow \gamma < 90° \text{ y } \delta < 90°$$

Por teorema de la correspondencia:

$$a > m$$

$$a > b$$

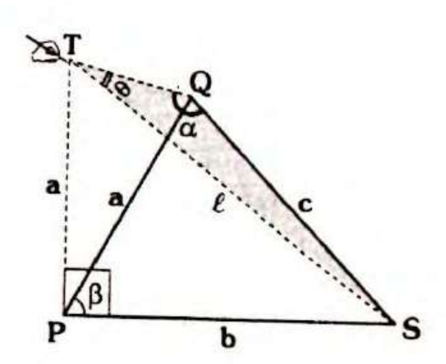




En el gráfico, se cumple:

$$\text{Si: } \beta < 90° \Rightarrow c^2 < a^2 + b^2$$

Demostración



- Se traza $\overline{PT} \perp PS$ tal que $PT = a$ y como $\beta < 90°$, $\overline{PQ}$ estará en la parte interna del $\measuredangle TPS$.
- ΔPTQ : isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle QTP = m\measuredangle TPQ \qquad \ldots \text{(I)}$$

- $\triangle TPS$: $\ell^2 = a^2 + b^2$ *(T. pitágoras)*
- ΔTQS : se tendrá: $\alpha > m\measuredangle TQP$

$$m\measuredangle PTQ > \theta$$

- Por (I), se tendrá $\alpha > \theta$
- Por teorema de la correspondencia

Como: $\alpha > \theta \Rightarrow \ell > c$

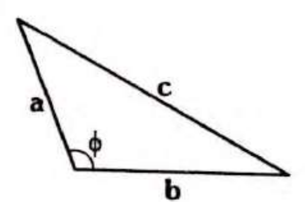
$$\Rightarrow \ell^2 > c^2$$

- Pero en $\triangle TPS$: $\ell^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 > c^2$$

$$\therefore c^2 < a^2 + b^2$$

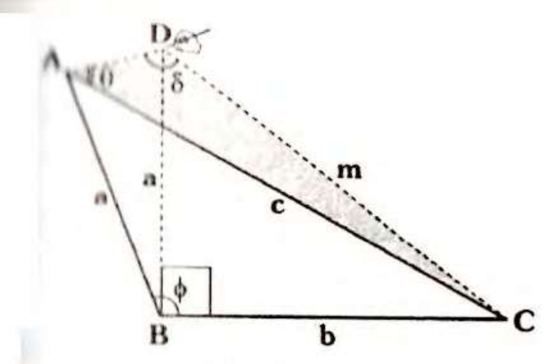
TEOREMA 21



En el gráfico, se cumple:

Si $\phi > 90° \Rightarrow c^2 > a^2 + b^2$

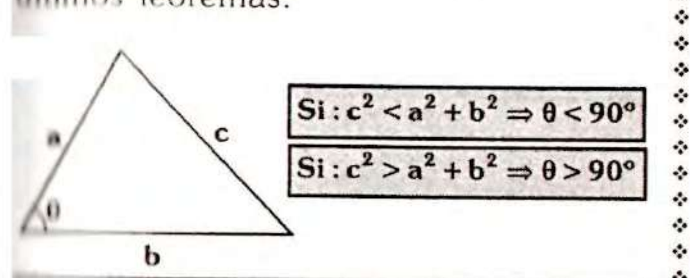
Demostración:



- Se traza $\overline{BD} \perp \overline{BC}$ tal que $BD = a$, como $\phi > 90°$, $\overline{BD}$ cortará a $\overline{AC}$.
- Como $BD = BA \Rightarrow \triangle ABD$ es isósceles: $m\measuredangle BAD = m\measuredangle ADB$
- En ⊿DBC: $m^2 = a^2 + b^2$
- En $\triangle ADC$: $\delta > m\measuredangle ADB$
  $m\measuredangle BAD > \theta \Rightarrow \delta > \theta$
- Por t. de la correspondencia en $\triangle ADC$:
  Como $\delta > \theta \Rightarrow c > m$
  $\Rightarrow c^2 > m^2$
- Pero en ⊿DBC : $m^2 = a^2 + b^2$
  $\Rightarrow c^2 > a^2 + b^2$

TEOREMA 22

Consideramos los recíprocos (4) de los dos últimos teoremas.



(4) ver anexos: métodos de demostración.

Demostración

- Para realizar la demostración de estos dos teoremas, usaremos el método de reducción al absurdo. Sólo demostraremos el primer teorema, el segundo es análogo.
- Supongamos que no se cumple $\theta < 90°$ con lo cual tendremos:

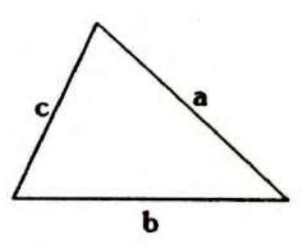
  $$\theta = 90° \quad ó \quad \theta > 90°$$

- Si $\theta = 90° \Rightarrow$ por teorema 19 $a^2 + b^2 = c^2$, contradice la condición.
- Si $\theta > 90° \Rightarrow$ por teorema 21 $c^2 > a^2 + b^2$, también contradice la condición.

$\therefore$ Se concluye que $\theta < 90°$



Con los últimos teoremas demostrados podremos reconocer la ***naturaleza del triángulo*** *a partir de sus lados.*



Si: $a > b$ y $a > c$

Si: $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ *es un triángulo rectángulo*

Si: $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ *es un triángulo acutángulo*

Si: $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ *es un triángulo obtusángulo*

LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

DEFINICIÓN

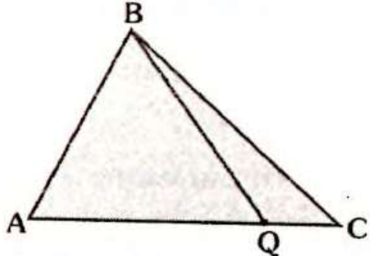
Son segmentos o rectas (en algunos casos rayos) que se relacionan con los lados o con los ángulos en el triángulo. Las más comunes son:

CEVIANA

Es un segmento de recta que tiene como extremos: un vértice del triángulo y el otro es un punto de la recta que contiene al lado opuesto.

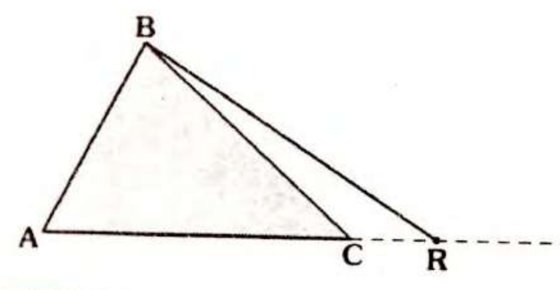
- En el gráfico, para ΔABC

  $\overline{BQ}$: ceviana interior



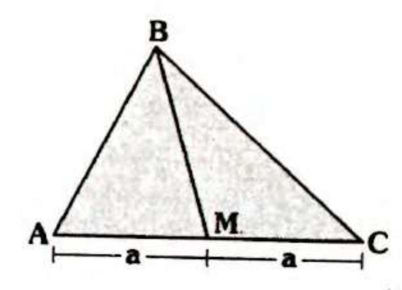
- En el gráfico, para el ΔABC :

  $\overline{BR}$: ceviana exterior



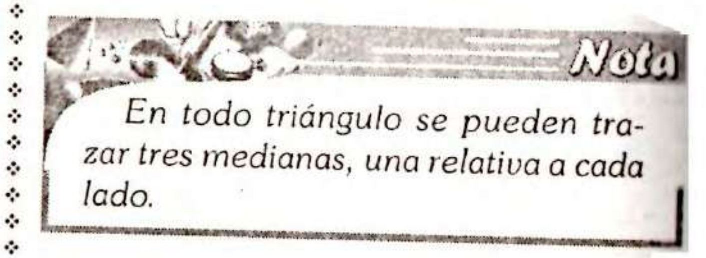
MEDIANA

Es aquel segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el otro es el punto medio del lado opuesto.



- En el gráfico:

  $\overline{BM}$ es una mediana, en este gráfico es la mediana relativa a $\overline{BC}$.



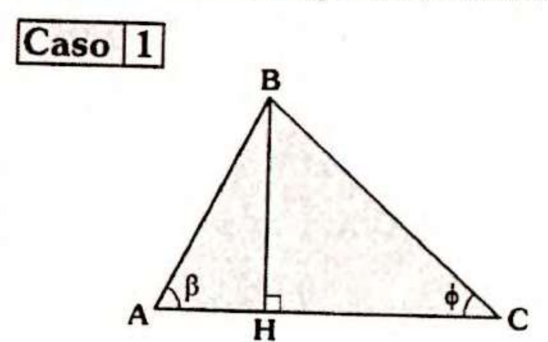
En todo triángulo se pueden trazar tres medianas, una relativa a cada lado.

ALTURA

Es aquel segmento de recta, cuyos extremos son un vértice del triángulo y el otro está en la recta que contiene al lado opuesto, tal que dicho segmento es perpendicular al lado.

Se presentan los siguientes casos:

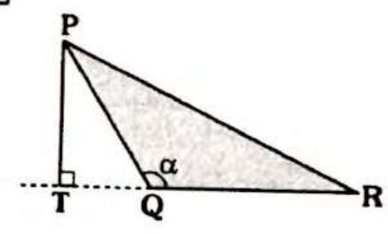
Caso 1



- Si $\beta < 90°$ y $\phi < 90°$
- En el ΔABC :

  $\overline{BH}$: altura relativa a $\overline{AC}$

Caso 2

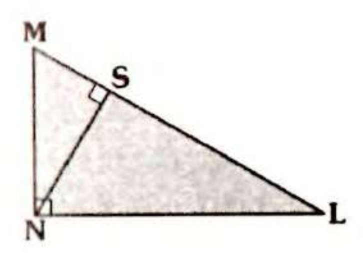


- Si $\alpha = 90°$

- Para el ΔPQR

  $\overline{PT}$: Altura relativa a $\overline{QR}$

Caso 3



- Para el ⊿MNL

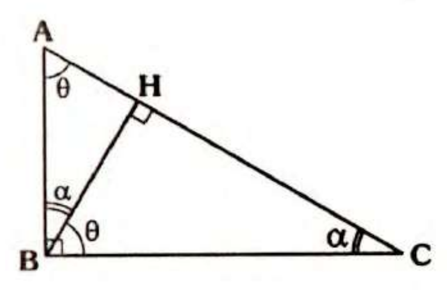
  $\overline{NS}$: altura relativa a $\overline{ML}$

  $\overline{MN}$: altura relativa a $\overline{NL}$

  $\overline{LN}$: altura relativa a $\overline{MN}$

Observación

En un triángulo rectángulo al trazar la altura relativa a la base, se tendrán tres triángulos rectángulos con las mismas medidas angulares.



Se cumple:

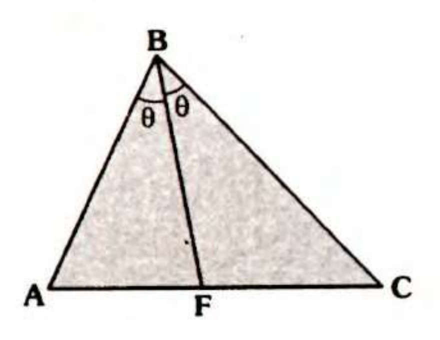
$$m\measuredangle HBC = m\measuredangle BAC = \theta$$

$$m\measuredangle HBA = m\measuredangle BCA = \alpha$$

BISECTRIZ

BISECTRIZ INTERIOR

Es aquella ceviana interior que biseca al ángulo interior.

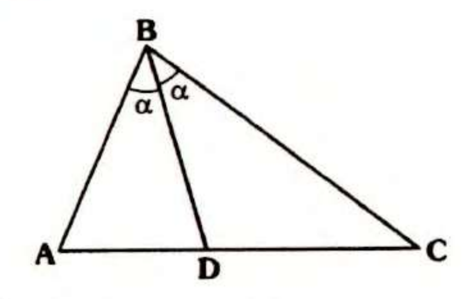


- En el gráfico para el ΔABC como:

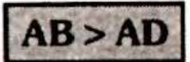
$$m\measuredangle ABF = m\measuredangle FBC$$

$\Rightarrow$ $\overline{BF}$: bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$.

TEOREMA 23



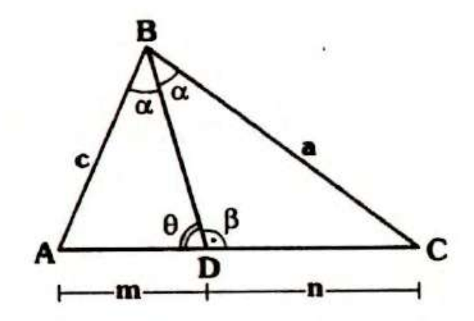
En el gráfico, se cumple:



$$AB > AD$$

$$BC > CD$$

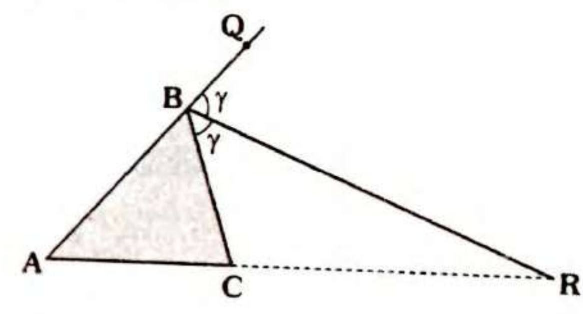
Demostración



- En ΔBDC: $\theta > \alpha$
- Por teorema de la correspondencia en ΔADB: como $\theta > \alpha \Rightarrow c > m$
- En forma análoga: $\beta > \alpha \Rightarrow a > n$

BISECTRIZ EXTERIOR

Es aquella ceviana exterior que biseca al ángulo exterior.



En el gráfico $m\measuredangle CBR = m\measuredangle RBQ$

$\Rightarrow$ $\overline{BR}$ es bisectriz exterior relativa a $\overline{AC}$.

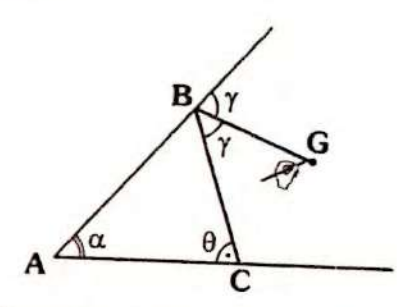
TEOREMA 24

Si dos lados son de diferente longitud, la bisectriz exterior relativa al tercer lado se ubicará en la región exterior relativa al menor de dichos lados y recíprocamente.

Demostración

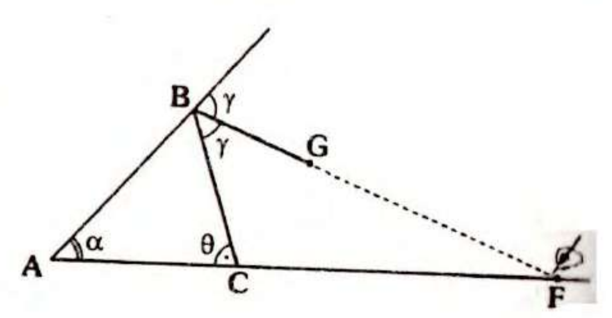
La demostración consta de dos partes, debido al carácter recíproco.

Parte I

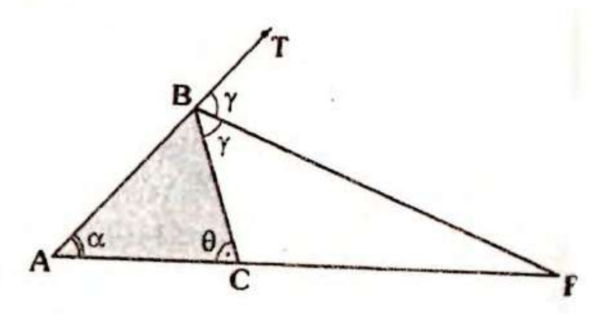


- En el gráfico $AB > BC$, vamos a probar que la prolongación de $\overline{BG}$ corta a la prolongación de $\overline{AC}$. Para ello será suficiente probar: $\theta > \gamma$.
- Por $\measuredangle$ exterior: $2\gamma = \alpha + \theta$ ... (I)
- Como : $AB > BC \Rightarrow \theta > \alpha$

  $\Rightarrow \theta + \theta > \alpha + \theta$ ... (II)
- De (I) y (II): $2\theta > 2\gamma \Rightarrow \theta > \gamma$
- Como $\theta > \alpha$, las prolongaciones de $\overline{BG}$ y $\overline{AC}$ se cortan.



Parte II



- En el gráfico, vamos a demostrar $AB > BC$
- En ΔABF: $m\measuredangle FBT > \alpha$

  Es decir: $\gamma > \alpha$ ... (I)
- En ΔCBF: $\theta > m\measuredangle CBF$

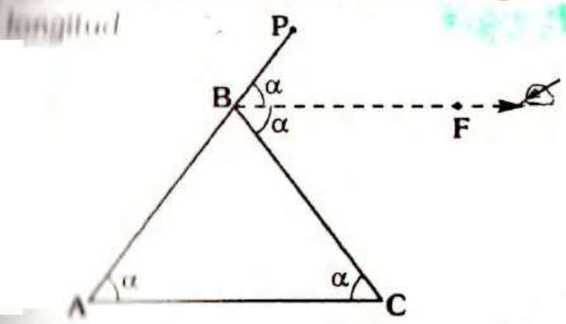
  Es decir: $\theta > \gamma$ ... (II)
- De (II) y (I): $\theta > \gamma > \alpha$

  $\Rightarrow \theta > \alpha$
- En ΔABC por teorema de la correspondencia.

  Como: $\theta > \alpha \Rightarrow AB > BC$

Observación

- *Si el triángulo tiene dos lados de igual longitud*

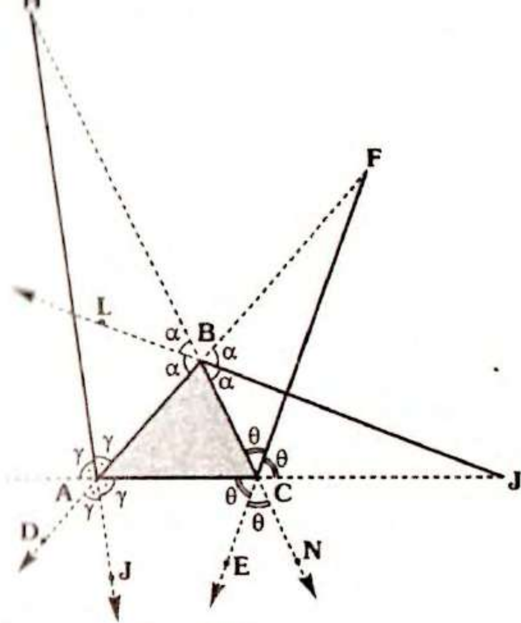


Si AB = BC ⇒ m∢BAC = m∢ACB *al bisecar el ángulo exterior notamos que* BF // AC.

En este caso diremos que el rayo BF es bisectriz del ángulo PBC.

- *En un triángulo escaleno observaremos las tres bisectrices exteriores.*

En el gráfico, sea el ΔABC *escaleno.*



Sea AC > AB > BC

⇒ $\overline{BJ}$, $\overline{CF}$ y $\overline{AH}$ *son bisectrices exteriores para el* ΔABC.

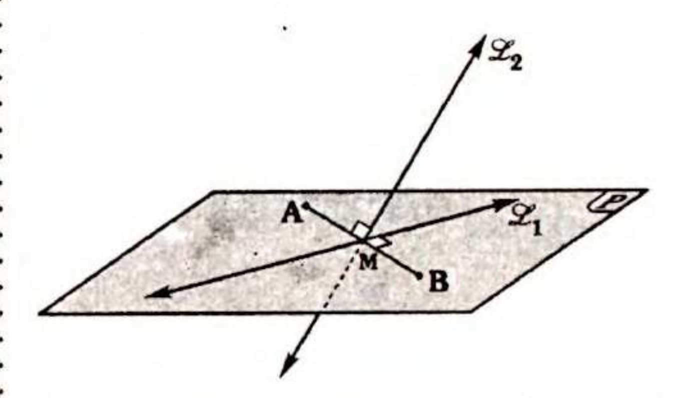
- AJ *es bisectriz del ángulo* DAC.
- CE *es bisectriz del ángulo* ACN.
- BL *es bisectriz del ángulo* ABH.

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

La mediatriz de un segmento, es la recta perpendicular en su punto medio.

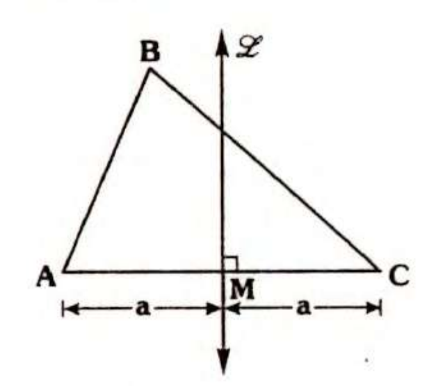
Si consideramos un triángulo, la mediatriz de un lado es la recta copla-nar al triángulo y perpendicular en su punto medio.

- Consideremos el segmento (gráfico espacial).



Si AM = MB, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \perp \overline{AB}$, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 \perp \overline{AB}$ (M ∈ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y M ∈ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$), se tendrá $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ son mediatrices de $\overline{AB}$.

- Si consideramos el plano que determina el triángulo ABC.



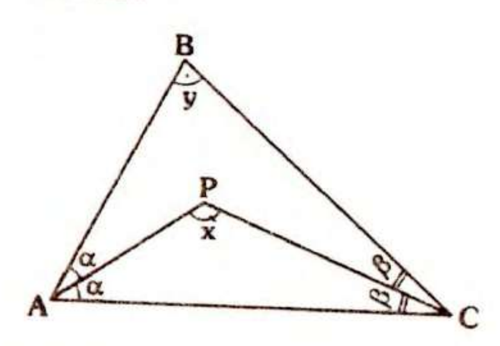
Si: AM = MC

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overline{AC}$

⇒ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.

ÁNGULO ENTRE BISECTRICES

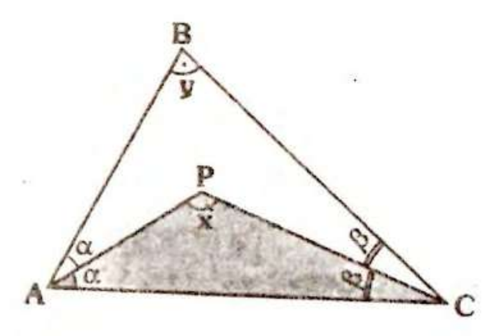
TEOREMA 25



En el gráfico, se cumple:



Demostración



- En $\triangle ABC$:

$$x + \alpha + \beta = 180° \quad \ldots (I)$$

- En ⩓ABCP:

$$x = \alpha + \beta + y \quad \ldots (II)$$

- Sumando las ecuaciones (I) y (II):

$$2x + \cancel{\alpha + \beta} = 180° + \cancel{\alpha + \beta} + y$$

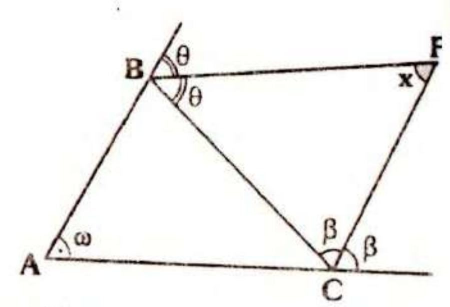
$$2x = 180° + y$$

$$\therefore\ x = 90° + \frac{y}{2}$$

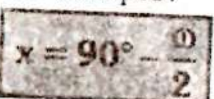
- Además:

como $x > 90° \Rightarrow \triangle APC$ es obtusángulo.

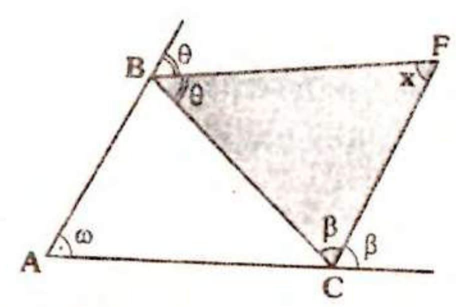
TEOREMA 26



En el gráfico, se cumple:



Demostración



- En $\triangle BFC$: $\quad x + \theta + \beta = 180° \quad \ldots (I)$
- En ⏢, por teorema 6:

$$x + \omega = \theta + \beta \quad \ldots (II)$$

- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\theta + \beta} + \omega = 180° + \cancel{\theta + \beta}$$

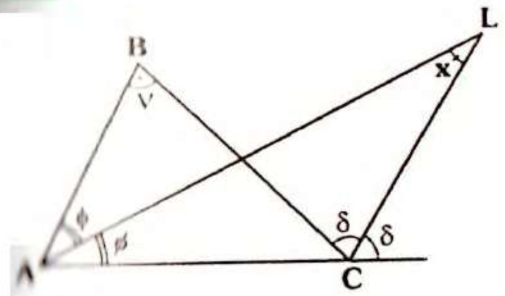
$$\Rightarrow\ 2x + \omega = 180°$$

$$\therefore\ x = 90° - \frac{\omega}{2}$$

- Además:

Del último resultado: $x < 90°$
Como $2\theta < 180° \Rightarrow \theta < 90°$
$2\beta < 180° \Rightarrow \beta < 90°$
Se puede asegurar:
$\triangle BFC$: acutángulo

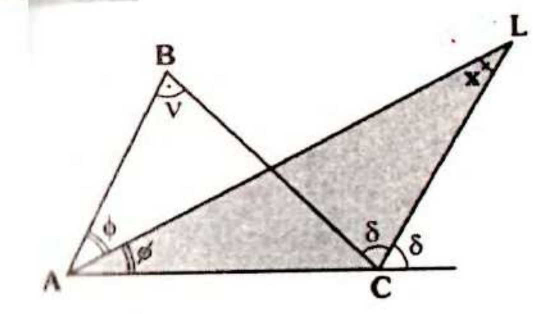




En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{v}{2}$$

Demostración



- En $\triangle ALC$: $\quad x + \phi = \delta \quad$ ... (I)
- En $\bowtie$: $\quad x + \delta = v + \phi \quad$ ... (II)
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\phi + \delta} = v + \cancel{\phi + \delta}$$

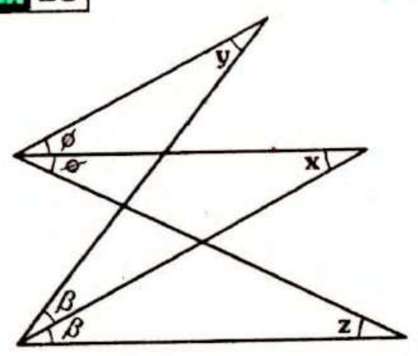
$$2x = v$$

$$\therefore \; x = \frac{v}{2}$$

- Además:

> Como $2\delta < 180° \Rightarrow \delta < 90°$
>
> $m\sphericalangle ACL + \delta = 180°$
>
> $\Rightarrow m\sphericalangle ACL > 90°$
>
> Afirmamos entonces:
>
> $\triangle ALC$: obtusángulo

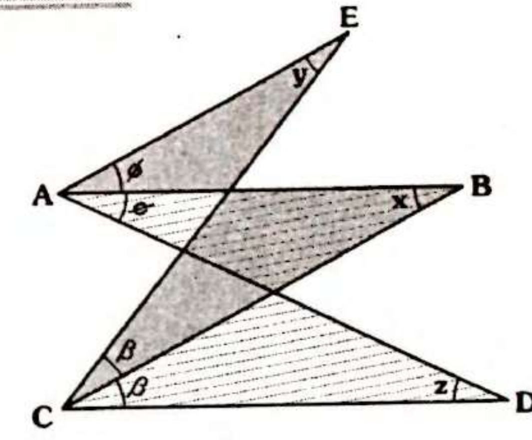
TEOREMA 28



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{y + z}{2}$$

Demostración



- Por teorema 5

En (A, E, B, C): $\quad x + \beta = y + \phi \quad$ ... (I)

En ${}^{A}_{C}\bowtie^{B}_{D}$: $\quad x + \phi = z + \beta \quad$ ... (II)

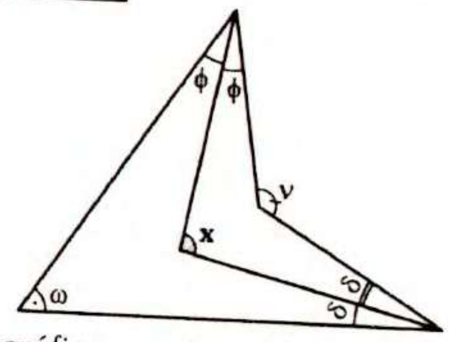
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\beta + \phi} = y + z + \cancel{\beta + \phi}$$

$$2x = y + z$$

$$\therefore \; x = \frac{y + z}{2}$$

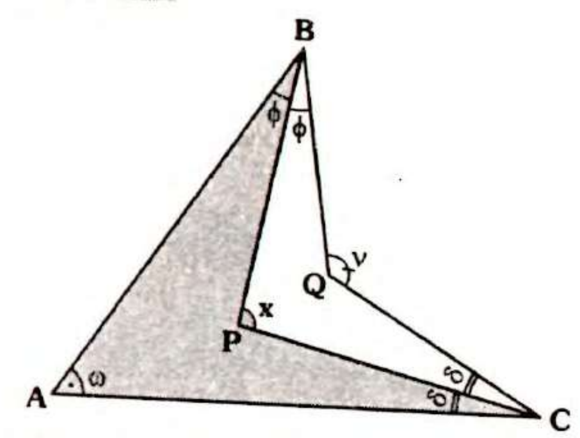
TEOREMA 29



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{\omega + \nu}{2}$$

Demostración



- Por el teorema 4

En $\triangle ABC$ (P): $x = \omega + \phi + \delta$ ... (I)

En $\triangle ABC$ (Q): $x + \phi + \delta = \nu$ ... (II)

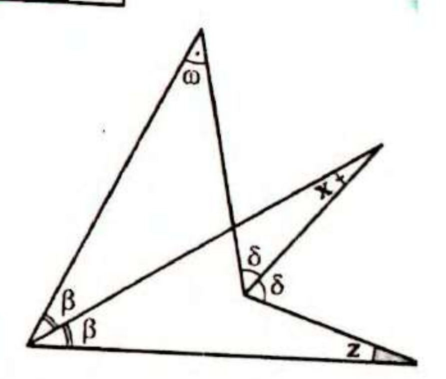
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\phi + \delta} = \omega + \nu + \cancel{\phi + \delta}$$

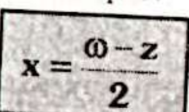
$$\Rightarrow 2x = \omega + \nu$$

$$\therefore x = \frac{\omega + \nu}{2}$$

TEOREMA 30

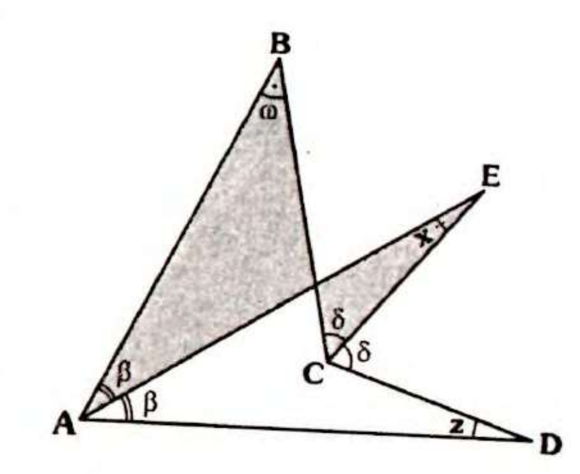


En el gráfico, se cumple:



$$x = \frac{\omega - z}{2}$$

Demostración



En ABEC: $x + \delta = \omega + \beta$ ... (I)

En AECD: $x + \beta + z = \delta$ ... (II)

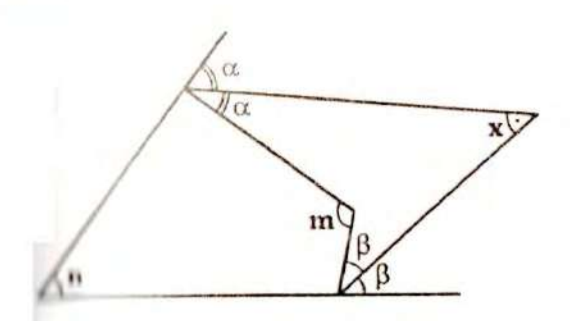
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\delta + \beta} + z = \omega + \cancel{\delta + \beta}$$

$$\Rightarrow 2x + z = \omega$$

$$\therefore x = \frac{\omega - z}{2}$$

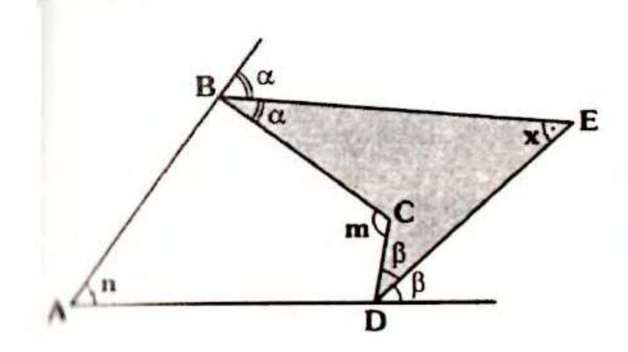
TEOREMA 31



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{m - n}{2}$$

Demostración



En (BCDE): $x + \alpha + \beta = m$ ... (I)

En (ABED): $x + n = \alpha + \beta$ ... (II)

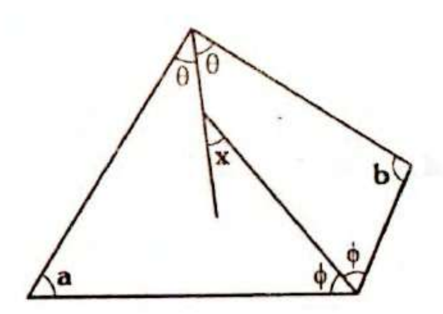
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \cancel{\alpha + \beta} + n = m + \cancel{\alpha + \beta}$$

$$2x + n = m$$

$$\therefore\ x = \frac{m - n}{2}$$

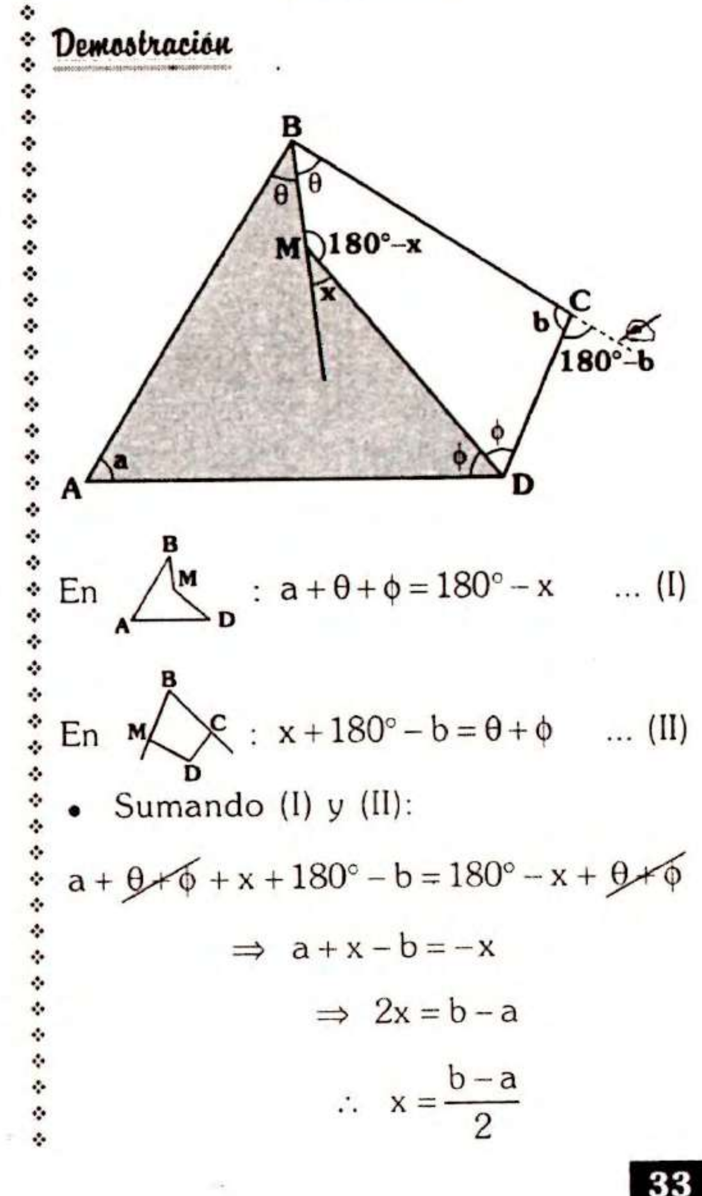
TEOREMA 32



En el gráfico, se cumple:

$$x = \frac{b - a}{2}$$

Demostración



En (AMD): $a + \theta + \phi = 180° - x$ ... (I)

En (BMCD): $x + 180° - b = \theta + \phi$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

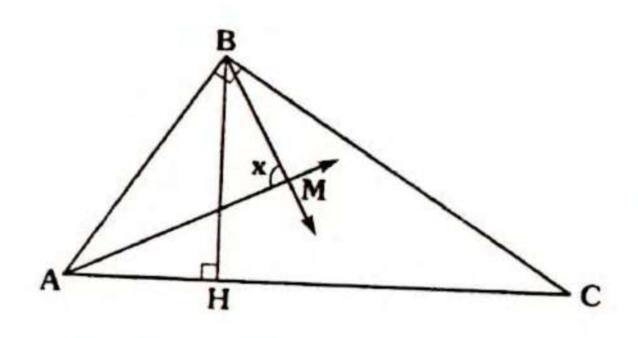
$$a + \cancel{\theta + \phi} + x + 180° - b = 180° - x + \cancel{\theta + \phi}$$

$$\Rightarrow\ a + x - b = -x$$

$$\Rightarrow\ 2x = b - a$$

$$\therefore\ x = \frac{b - a}{2}$$

TEOREMA 33

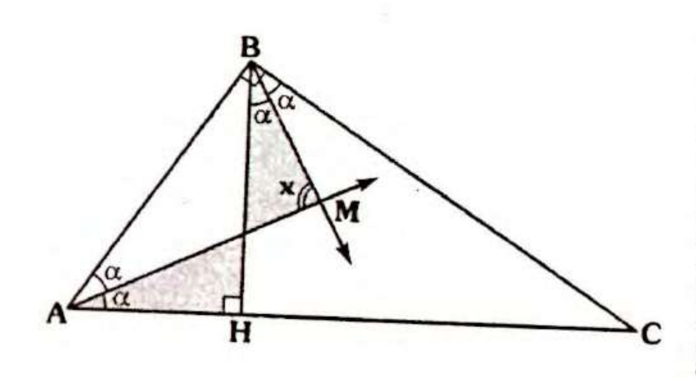


En el gráfico, $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{BM}$ son bisectrices de los ángulos BAC y HBC respectivamente.

Se cumple:

$$x = 90°$$

Demostración:



- Por la observación en el ◺, se tiene

$$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle HBC = 2\alpha$$

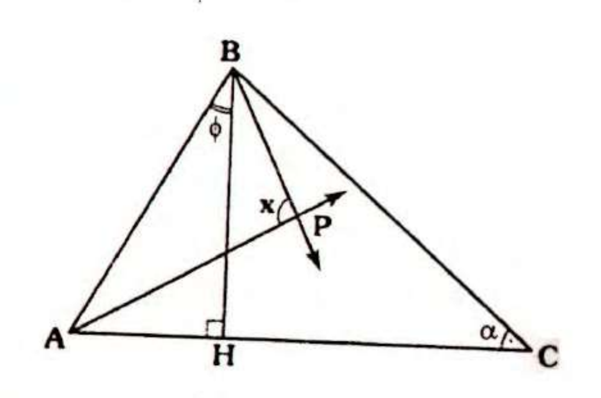
- En $\triangle$ ABHM:

$$x + \cancel{\alpha} = 90° + \cancel{\alpha}$$

$$\therefore\ x = 90°$$

TEOREMA 34

El siguiente teorema es una generalización del anterior.

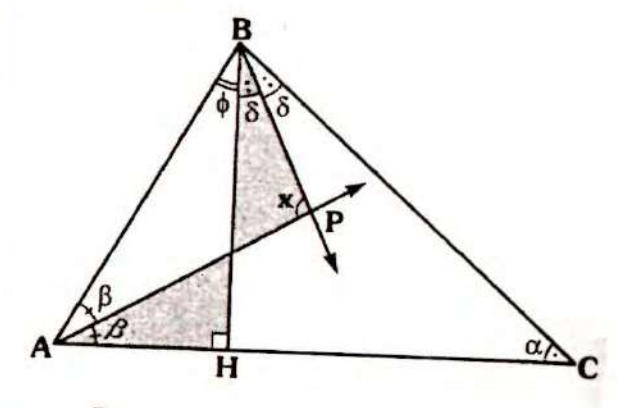


En el gráfico $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BP}$ son bisectrices de los ángulos BAC y HBC respectivamente.

Se cumplen:

$$x = 90° + \left(\frac{\alpha - \phi}{2}\right)$$

Demostración:



En ABHP : $x + \delta = 90° + \beta$

$$\Rightarrow\ x = 90° + (\beta - \delta) \quad \ldots \text{(I)}$$

En ◺AHB y BHC:

$$\phi + 2\beta = 90° \quad \ldots \text{(II)}$$

$$\alpha + 2\delta = 90° \quad \ldots \text{(III)}$$

- De (II) y (III):

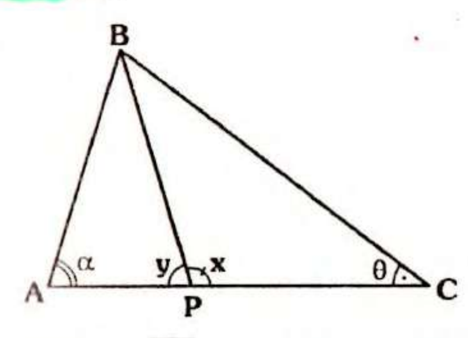
$$\phi + 2\beta = \alpha + 2\delta$$
$$2\beta - 2\delta = \alpha - \phi$$
$$\beta - \delta = \frac{\alpha - \phi}{2}$$

- En (I): $x = 90° + \left(\frac{\alpha - \phi}{2}\right)$

Nota

Si $\alpha = \phi$, entonces el triángulo ABC es triángulo rectángulo.

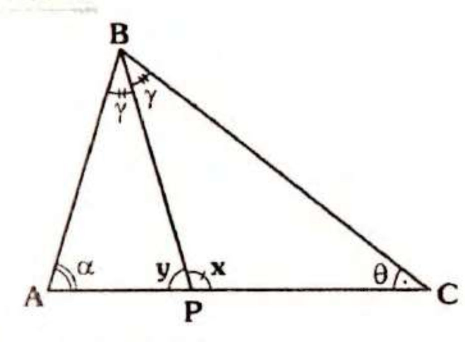
TEOREMA 35



En el gráfico, $\overline{BP}$ es bisectriz interior, se cumple:

$$\mathbf{x - y = \alpha - \theta}$$

Demostración



- Por ∢ exterior:

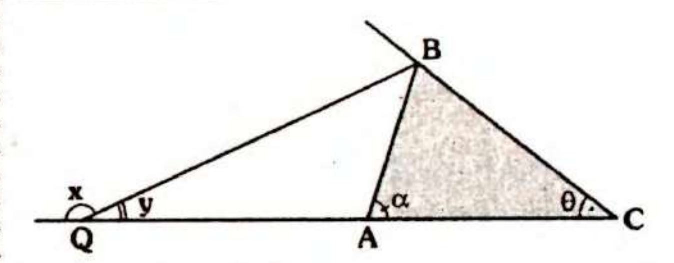
En ΔABP: $x = \alpha + \gamma$ ... (I)

En ΔPBC: $y = \theta + \gamma$ ... (II)

- Restando (I) y (II):

$$x - y = (\alpha + \gamma) - (\theta + \gamma)$$
$$\therefore\ x - y = \alpha - \theta$$

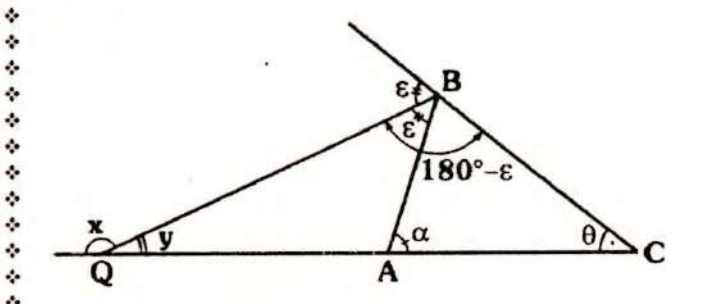
TEOREMA 36



En el gráfico, $\overline{BQ}$ es bisectriz exterior para el ΔABC, se cumple:

$$\mathbf{x - y = 180° - (\alpha - \theta)}$$

Demostración



- Por ∢ exterior

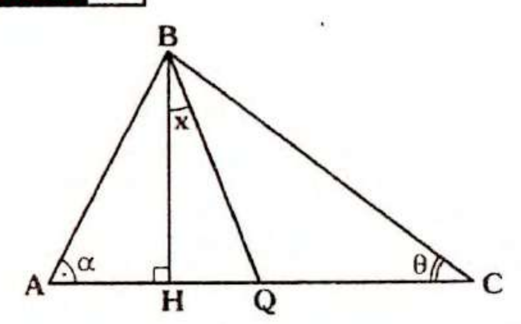
En ΔQBC: $x = 180° - \varepsilon + \theta$ ... (I)

En ΔQBA: $y + \varepsilon = \alpha$ ...(II)

- Restando (I) y (II):

$$x - (y + \varepsilon) = 180° - \varepsilon + \theta - \alpha$$
$$x - y - \cancel{\varepsilon} = 180° - \cancel{\varepsilon} - (\theta - \alpha)$$
$$\therefore\ x - y = 180° - (\theta - \alpha)$$

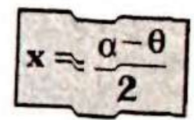
TEOREMA 37



En el gráfico para el ΔABC

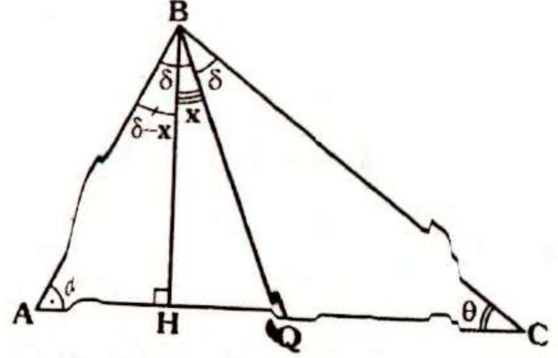
- $\overline{BH}$: Altura
- $\overline{BQ}$: Bisectriz interior

Se cumple:



$$x = \frac{\alpha - \theta}{2}$$

Demostración



- En $\triangle$ AHB y $\triangle$ BHC:

$$\alpha + \delta - x = 90° \quad \ldots (I)$$

$$\alpha + \delta + \theta = 90° \quad \ldots (II)$$

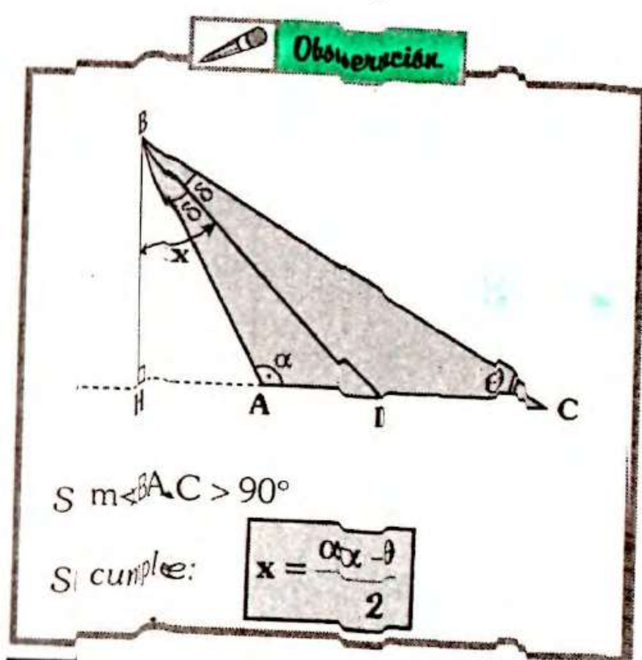
- De (I) y (II):

$$x + \delta + \theta = \alpha + \delta - x$$

$$\Rightarrow 2x = \alpha - \theta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha - \theta}{2}$$

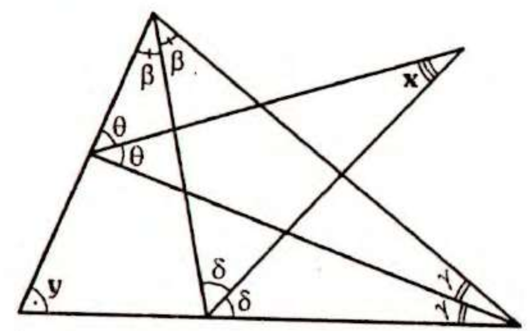
Observación



Si $m\angle BAC > 90°$

Se cumple: $x = \dfrac{\alpha - \theta}{2}$

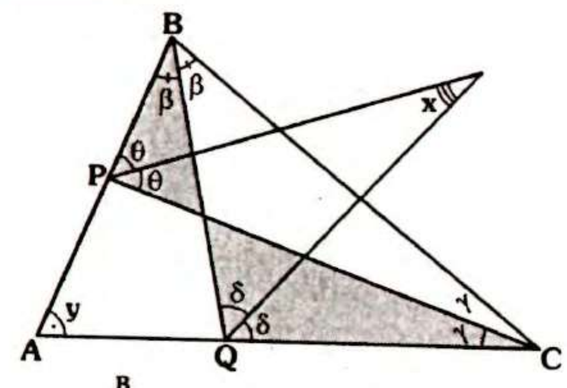
TEOREMA 38



En el gráfico, se cumple:

$$x = 45° - \frac{y}{4}$$

Demostración



- En $\triangle$ PBQC, por teorema 27

$$x = \frac{\beta + \gamma}{2} \quad \ldots (I)$$

- En ΔABC:

$$2\beta + 2\gamma + y = 180°$$

$$\Rightarrow \quad 2\beta + 2\gamma = 180° - y$$

$$\Rightarrow \quad \beta + \gamma = 90° - \frac{y}{2} \quad \ldots (II)$$

- De (II) y (I):

$$x = \frac{1}{2}\left(90° - \frac{y}{2}\right)$$

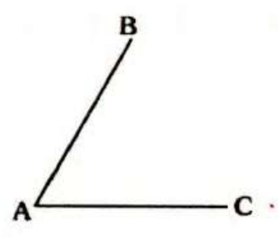
$$\therefore \quad x = 45° - \frac{y}{4}$$

ALGUNOS CRITERIOS PARA REALIZAR TRAZOS AUXILIARES

En la resolución de muchos ejercicios nos encontramos frente a situaciones en las que para su resolución no basta el uso de los teoremas mencionados. Se hace necesario algún trazo auxiliar (como a veces buscar algún triángulo isósceles o equilátero, trazar alguna bisectriz, realizar alguna prolongación, por indicar algunos casos).

En el capítulo de congruencia de triángulo se indicarán otros criterios y teoremas para tal fin. A continuación se consideran algunos criterios, así como reconocer algunos triángulos. El estudiante debe familiarizarse con ellos.

- Si $AB = BC$ y $m\sphericalangle BAC = 60°$

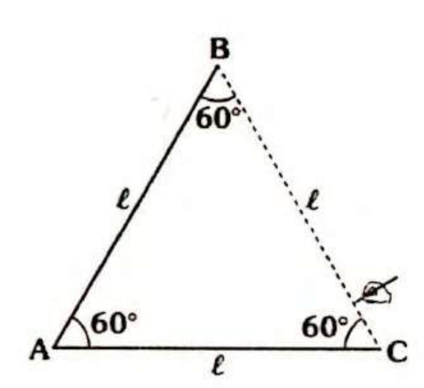


Se te sugiere: trazar $\overline{BC}$, debido a que:

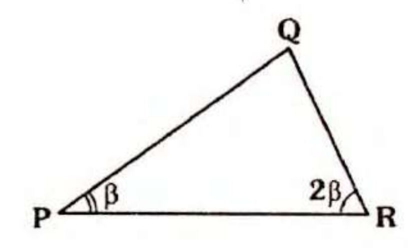
$$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle ACB = 60°$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ es equilátero

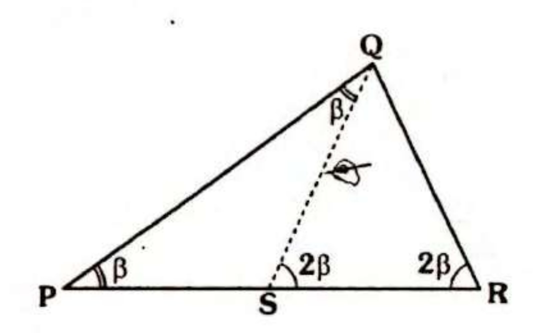
$\Rightarrow BC = \ell$



- En el gráfico, si $m\sphericalangle PRQ = 2(m\sphericalangle QPR)$



Se te sugiere:

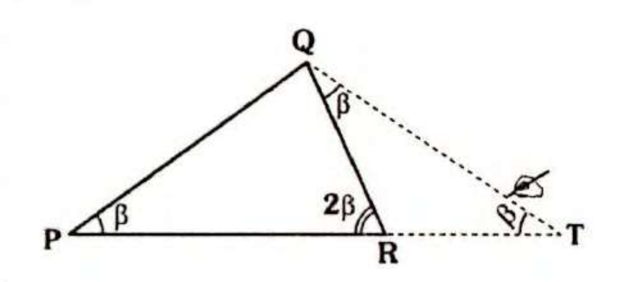


Trazar $\overline{QS}$, tal que $m\sphericalangle PQS = \beta$. Con ello se tendrá:

ΔPSQ y ΔSQR : isósceles

$\Rightarrow QR = QS = PS$

Otra posibilidad

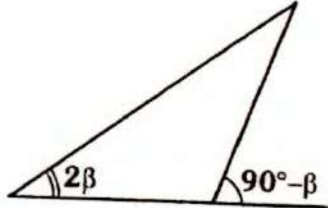


Trazar $\overline{QT}$ (*ceviana exterior*), tal que $m\sphericalangle PTQ = \beta$, ya que se tendrá:

$$m\sphericalangle RQT = \beta$$

Luego: ΔPQT y ΔRQT son isósceles

$\Rightarrow PQ = QT$ y $QR = RT$

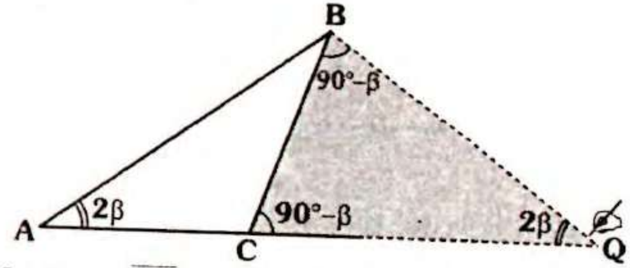


Observación

El primer caso se está considerando $m\sphericalangle PQR > \beta$, si no lo fuera entonces, se recomienda usar el segundo caso.

- En el gráfico:

Se te sugiere:

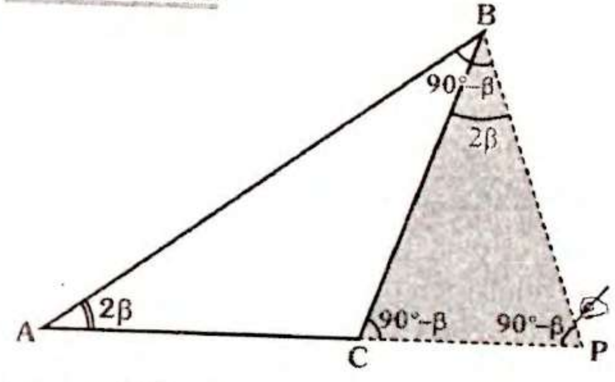


Se traza $\overline{BQ}$ tal que $m\sphericalangle AQB = 2\beta$ con ello se tendrá $m\sphericalangle CBQ = 90° - \beta$, luego:

ΔABQ y ΔCBQ son isósceles

$\Rightarrow AB = BQ = CQ$

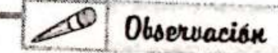
Otra posibilidad



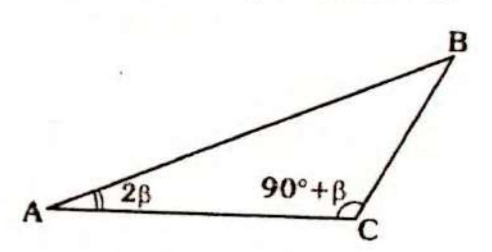
Se traza $\overline{BP}$ tal que $m\sphericalangle APB = 90° - \beta$ con ello se tiene: $m\sphericalangle ABP = 90° - \beta$, luego:

ΔABP y ΔCBP son isósceles

$\Rightarrow AB = AP$ y $CB = BP$

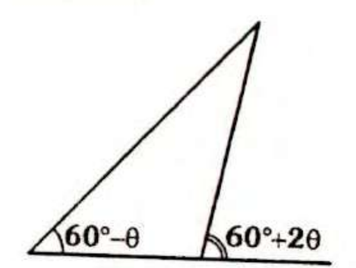


A veces se podría presentar así:

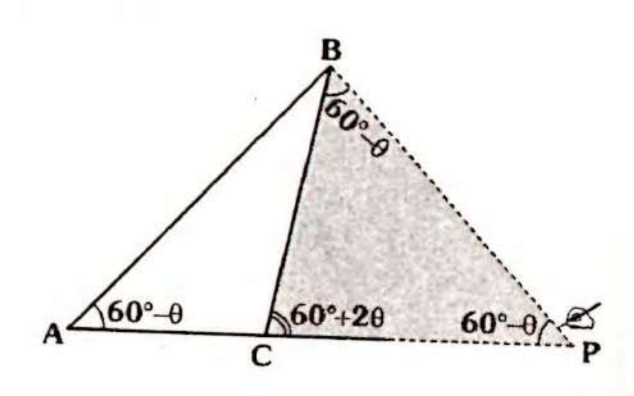


Que sería equivalente a los casos presentados.

- Si se presenta:



Se te sugiere:



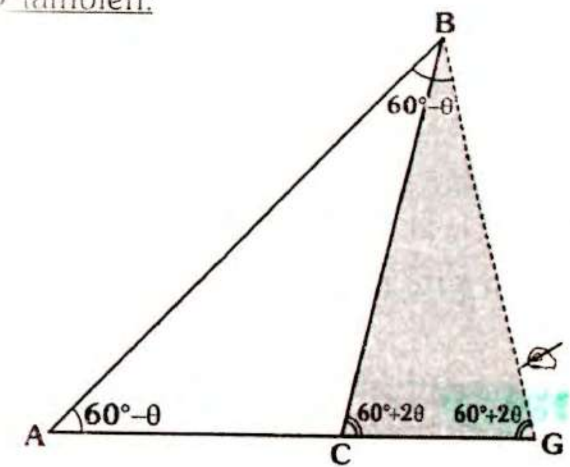
Trazar $\overline{BP}$ tal que $m\sphericalangle APB = 60° - \theta$ con ello se tendrá $m\sphericalangle CBP = 60° - \theta$

Tendremos entonces:

ΔABP y ΔCBP son isósceles

$\Rightarrow AB = BP = CP$

O también:



Se puede trazar $\overline{BG}$ tal que:

$$m\measuredangle AGB = 60° + 2\theta$$

Con lo cual tendremos:

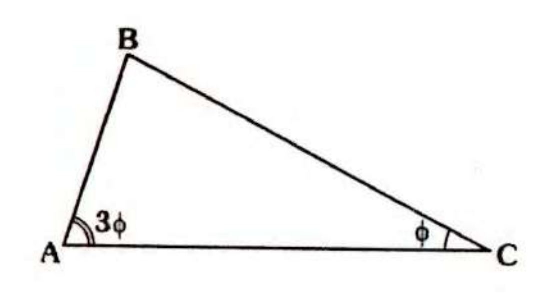
$$m\measuredangle ABG = 60° - \theta$$

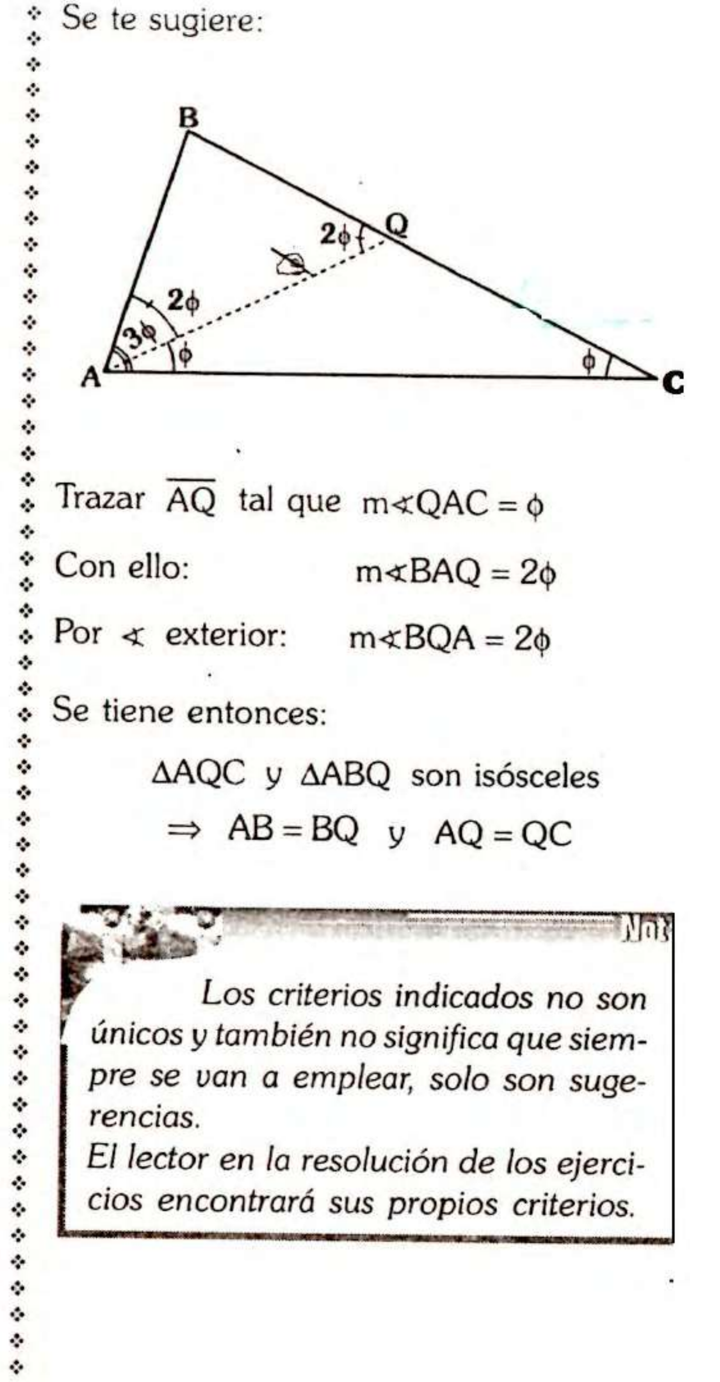
Luego:

ΔCBG y ΔABG : son isósceles

$$\Rightarrow \quad AB = AG \text{ y } CB = BG$$

- En el gráfico:





Se te sugiere:

Trazar $\overline{AQ}$ tal que $m\measuredangle QAC = \phi$

Con ello: $m\measuredangle BAQ = 2\phi$

Por $\measuredangle$ exterior: $m\measuredangle BQA = 2\phi$

Se tiene entonces:

ΔAQC y ΔABQ son isósceles

$$\Rightarrow AB = BQ \text{ y } AQ = QC$$

Los criterios indicados no son únicos y también no significa que siempre se van a emplear, solo son sugerencias.
El lector en la resolución de los ejercicios encontrará sus propios criterios.

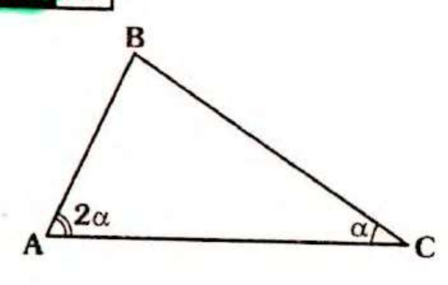


TEOREMAS SOBRE DESIGUALDADES EN TRIÁNGULOS

Los teoremas que se muestran a continuación, se demuestran con los teoremas antes mencionados y con algunas propiedades del álgebra que se indicarán.

En otras publicaciones se desarrollarán otras desigualdades geométricas.

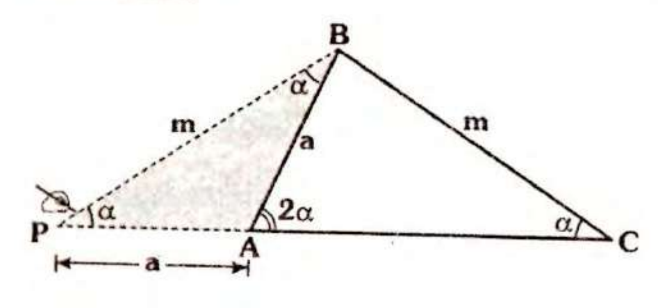
TEOREMA 39



En el gráfico, se cumple:

$$AB < BC < 2(AB)$$

Demostración



- Por T. de la correspondencia (*teorema* 14)

  Como: $m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle ACB$

  $\Rightarrow \quad m > a \qquad \ldots (I)$

- Se traza $\overline{BP}$ tal que $m\sphericalangle BPA = \alpha$

  $\Rightarrow AP = AB = a$

  $PB = BC = m$

- En ΔPAB, por teorema de existencia.

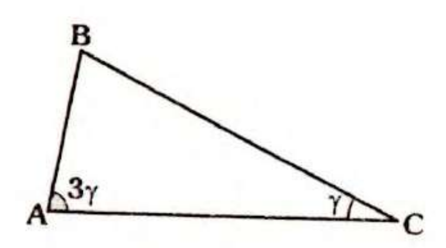
  $m < a + a$

  $m < 2a \qquad \ldots (II)$

- De (I) y (II):

  $$a < m < 2a$$

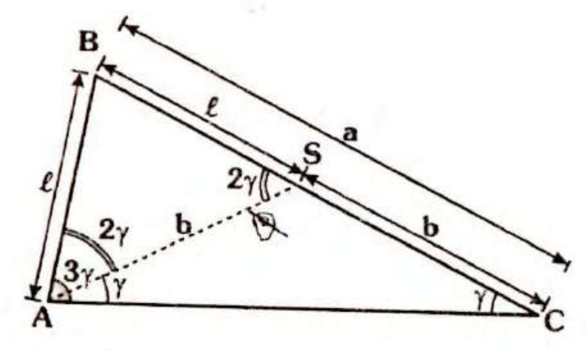
TEOREMA 40



En el gráfico, se cumple:

$$AB < BC < 3(AB)$$

Demostración



- En el gráfico se traza $\overline{AS}$ tal que $m\sphericalangle CAS = \gamma \Rightarrow$ ΔACS y ΔABS son isósceles

  $\Rightarrow AB = BS = \ell$

  $AS = SC = b$

- En el ΔABC por t. de la correspondencia como:

Como: $m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle ACB \Rightarrow a > \ell \qquad \ldots (I)$

- En ΔABS por t. de existencia:

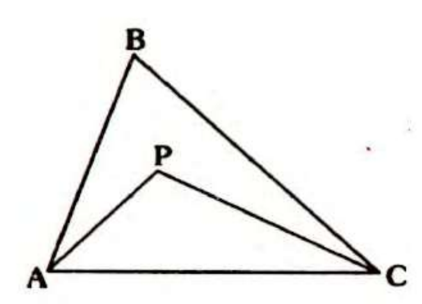
$$b < \ell + \ell$$
$$b < 2\ell$$
$$\Rightarrow \ell + b < 2\ell + \ell$$

Como $\ell + b = a \Rightarrow a < 3\ell$ ... (II)

- De (I) y (II):

$$\ell < a < 3\ell$$

TEOREMA 41

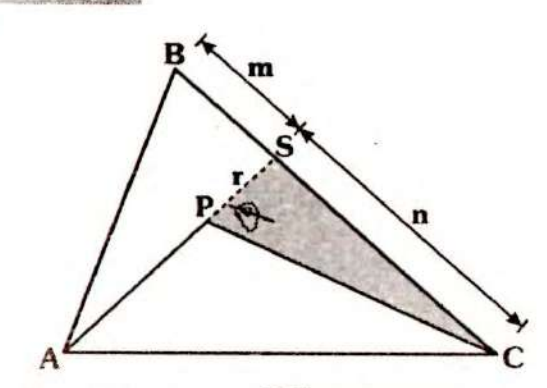


En el gráfico:

P: punto interior de ΔABC se cumple:

$$\boxed{AP + PC < AB + BC}$$

Demostración



- Se prolonga a $\overline{AP}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en S.
- Por teorema de existencia:

En ΔABS: $AP + r < AB + m$ ... (I)

En ΔPSC: $PC < r + n$ ... (II)

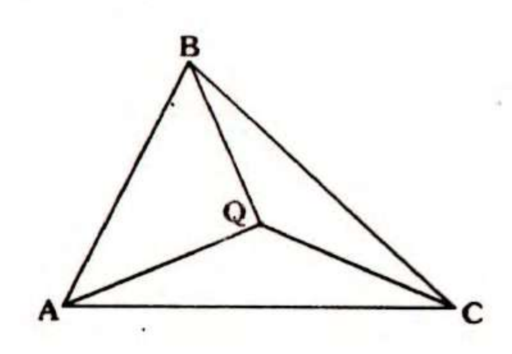
- Sumando (I) y (II):

$$AP + PC + r < AB + r + (m + n)$$

- Como: $BC = m + n$

$$\Rightarrow AP + PC < AB + BC$$

TEOREMA 42



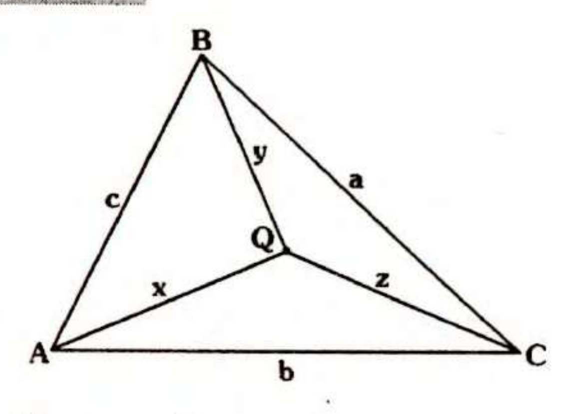
En el gráfico:

Q es un punto en la región interior del ΔABC y $2p = AB + BC + AC$

Se cumple:

$$\boxed{p < QA + QB + QC < 2p}$$

Demostración



- Tenemos $2p = a + b + c$
- Por teorema de existencia:

En ΔBQC: $a < y + z$ ... (I)

En ΔAQC: $b < x + z$ ... (II)

En ΔAQB: $c < x + y$ ... (III)

- Sumando (I), (II) y (III):

$$a + b + c < 2(x + y + z)$$

$$\Rightarrow 2p < 2(x + y + z)$$

$$\Rightarrow p < x + y + z \quad \text{... (IV)}$$

- Por teorema 41:

En : $x + z < a + c$ ... (V)

En : $x + y < a + b$ ... (VI)

En : $y + z < b + c$ ... (VII)

- Sumando (V), (VI) y (VII), se tiene:

$$\not{2}(x + y + z) < \not{2}(a + b + c)$$

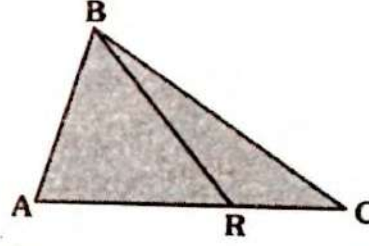
$$\Rightarrow x + y + z < a + b + c$$

$$\Rightarrow x + y + z < 2p \quad \text{... (VIII)}$$

- De (IV) y (VIII):

$$p < x + y + z < 2p$$

TEOREMA 43

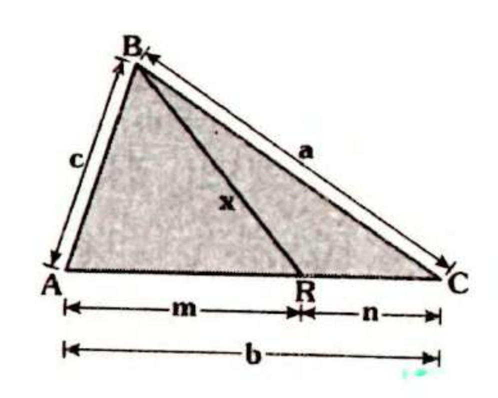


En el gráfico:

Sea p: semiperímetro de ▲ABC
Se cumple:

$$\boxed{p - AC < BR < p}$$

Demostración



- Sea: $2p = a + b + c$ ... (α)
- Por teorema de existencia:

En ΔBRC: $x < a + n$ ... (I)

En ΔABR: $x < c + m$ ... (II)

- Sumando (I) y (II):

$$2x < a + c + m + n$$

- Como: $m + n = b \Rightarrow 2x < a + c + b$
- De (α): $\Rightarrow 2x < 2p$

$$\Rightarrow x < p \quad \text{... (III)}$$

En ΔABR: $c < m + x$ ... (I)

En ΔBRC: $a < n + x$ ... (V)

- Sumando (I) y (V):

$$a + c < m + n + 2x$$

- Como $m + n = b \Rightarrow a + c < b + 2x$

$$\Rightarrow a + c + b < 2b + 2x$$

$$2p < 2b + 2x$$

$$\Rightarrow p - b < x \quad \text{... (VI)}$$

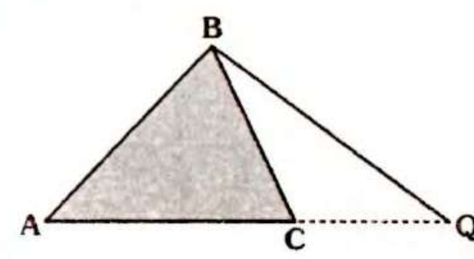
- De (III) y (VI):

$$p - b < x < p$$

Nota

El último teorema nos da las condiciones para reconocer a una ceviana interior relativa a un lado.

TEOREMA 44



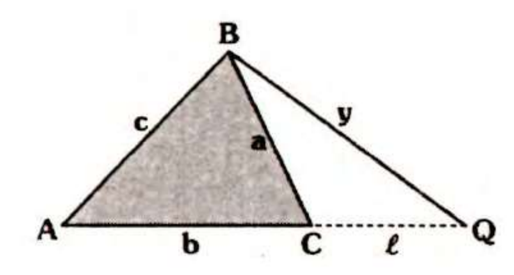
En el gráfico

p : semiperímetro de ABC

Se cumple:

$$BQ > p - AB$$

Demostración



- Se tiene $a + b + c = 2p$
- Por teorema de existencia

En ΔBCQ : $a < y + \ell$ ... (γ)

En ΔABQ : $b + \ell < c + y$ ... (α)

- Sumando (I) y (II):

$$a + b + \not{\ell} < 2y + c + \not{\ell}$$

$$\Rightarrow \quad a + b < 2y + c$$

$$a + b + c < 2y + 2c$$

- Como $a + b + c = 2p$

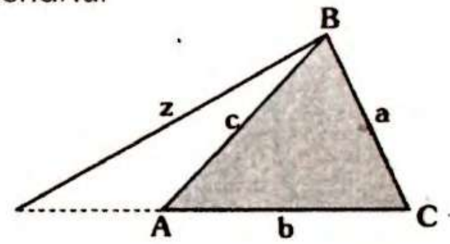
$$\Rightarrow \quad 2p < 2y + 2c$$

$$p < y + c$$

$$\therefore \quad p - c < y$$

Observación

Si la ceviana exterior se encuentra en la región exterior relativa a $\overline{AB}$, se tendría:

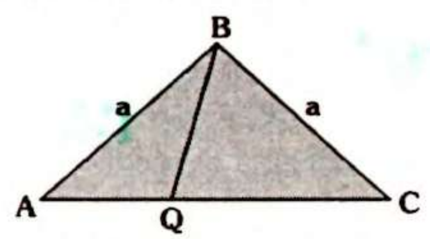


Se demuestra en forma análoga:

$$z > p - a$$

TEOREMA 45

Los siguientes teoremas se demuestran en forma inmediata (por teorema 13, del triángulo isósceles), son casos de la ceviana interior a exterior.

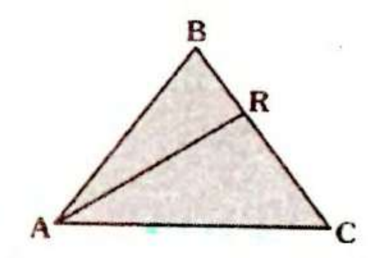


$\overline{BQ}$: ceviana interior

Se cumple: $BQ < a$

$\overline{SH}$: ceviana exterior

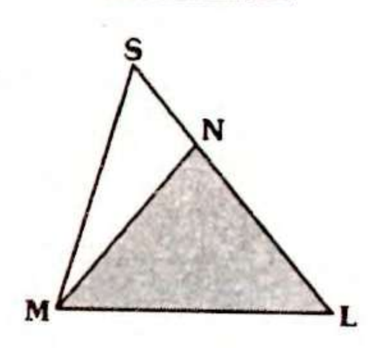
Se cumple: $SH > \ell$



Si $AB = BC$

$\overline{AR}$: ceviana interior se cumple:





Si $MN = NL$

$\overline{AS}$: ceviana exterior se cumple:

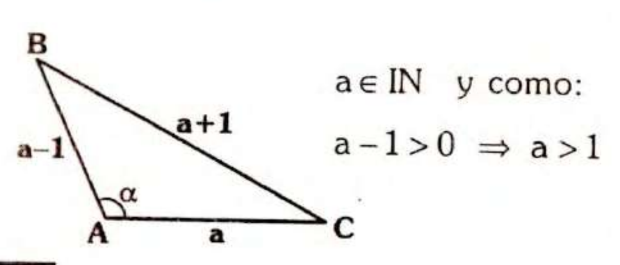
MS < SL

TEOREMA 46

Existe un sólo triángulo obtusángulo de longitudes enteras consecutivas.

Demostración

- Sean las longitudes de los lados: $a-1$, a y $a+1$, se puede observar como "$a+1$" corresponde al mayor lado se le opone al mayor ángulo.



$a \in \mathbb{N}$ y como:

$a-1>0 \Rightarrow a>1$

- Como α es el mayor ángulo $\Rightarrow \alpha > 90°$ por ser triángulo obtusángulo.

- Por teorema de existencia (*forma práctica*)

$$(a-1)-(a-1) < a < (a+1)+(a-1)$$

$$2 < a < 2a$$

- La desigualdad $a < 2a$ siempre se cumple, lo que aprovechamos aquí es:

$$a > 2 \qquad \dots (I)$$

- Como $\alpha > 90°$ y por teorema 21

$$(\alpha+1)^2 > a^2 + (a-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad (a+1)^2 - (a-1)^2 > a^2$$

- Por identidad de Legendre:

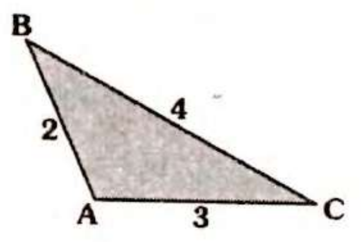
$$4a.1 < a^2$$

$$\Rightarrow \quad 4 < a \qquad \dots (II)$$

- De (I) y (II):

$$2 < a < 4$$

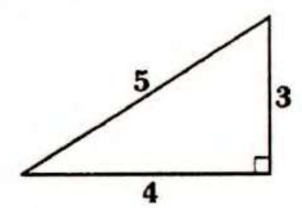
y como "a" es natural $\Rightarrow a = 3$ lo que hace que el triángulo sea único.



Es el único triángulo obtusángulo de longitudes enteras consecutivos.

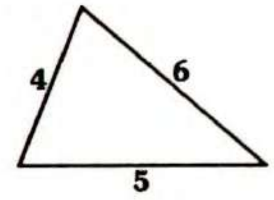


El único triángulo rectángulo de longitudes enteras consecutivas es:

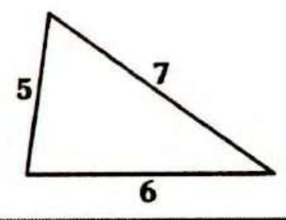


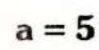
Los demás triángulos de longitudes enteras consecutivas son acutángulos. Si consideramos que los lados midan $a-1$, *a y* $a+1$, $a>4$ *y* $a\in\mathbb{N}$ *se tendrán siempre lados de un triángulo acutángulo, por ejemplo:*

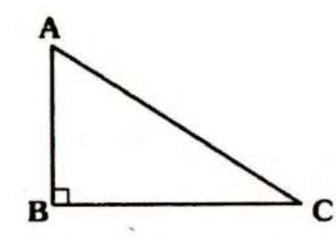
a = 5



a = 6

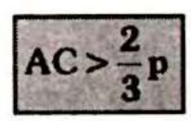




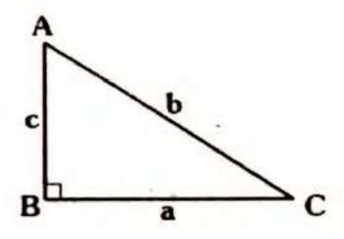


En el gráfico, p es semiperímetro de $\triangle$ABC

Se cumple:



Demostración



- Se tiene $a+b+c=2p$

  Como AC es el mayor lado se tiene:

$$b>a \qquad \ldots \text{(I)}$$

$$b>c \qquad \ldots \text{(II)}$$

- Sumando (I) y (II):

$$2b>a+c$$

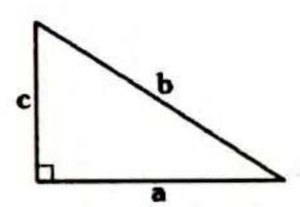
$$\Rightarrow \quad b+2b>a+c+b$$

- Pero: $\quad 2p=a+b+c$

$$\Rightarrow \quad 3b>2p$$

$$\therefore \ b>\frac{2}{3}p$$

TEOREMA 48



En el gráfico, se cumple:

$$(a+b)^2 \le 2c^2$$

Demostración

- Partimos de la desigualdad:

$$(a-b)^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2+b^2 \ge 2ab$$

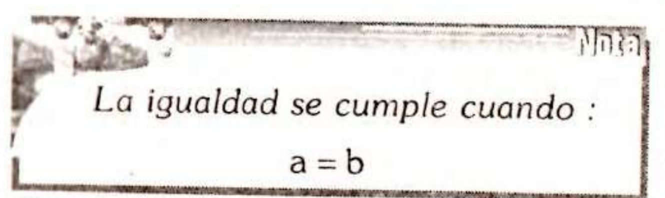
- Sumando a ambos miembros: $a^2 + b^2$, tendremos:

$$2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab$$

- Pero, por teorema de pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow \quad 2c^2 \geq (a + b)^2$$



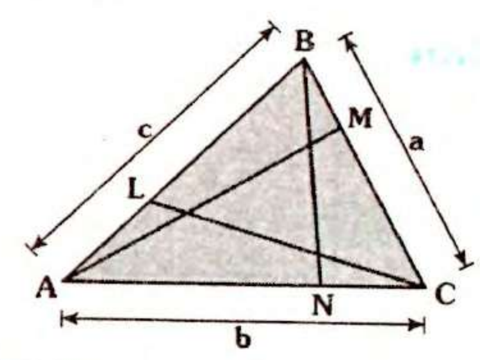
La igualdad se cumple cuando :

$a = b$

TEOREMA 49

La suma de longitudes de tres cevianas interiores, trazadas uno por vértice, está comprendido entre el semiperímetro y el triple de dicho semiperímetro.

Demostración



- Sea $2p = a + b + c$
- Por teorema 42

$$p - b < BN < p \qquad \ldots (I)$$

$$p - a < AM < p \qquad \ldots (II)$$

$$p - c < CL < p \qquad \ldots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$3p - (a + b + c) < BN + AM + CL < 3p$$

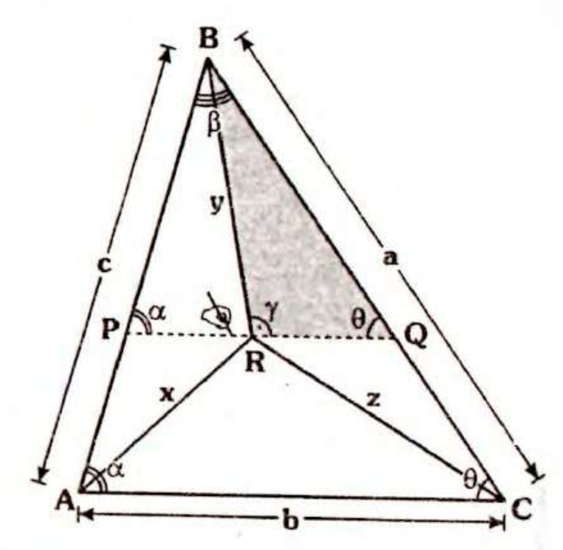
$$3p - 2p < BN + AM + CL < 3p$$

$$\therefore\ p < BN + AM + CL < 3p$$

TEOREMA 50 (Teorena de Visschers)

En todo triángulo la suma de distancias de un punto interior a sus vértices, es menor que la suma de los dos lados de mayor longitud.

Demostración



- Sea $a \geq c \geq b \Rightarrow \alpha \geq \theta \geq \beta$

  Se traza $\overline{PQ} // \overline{AC}$

  $\Rightarrow m\sphericalangle BRQ = \alpha,\ m\sphericalangle PQB = \theta$

- En ΔRBQ: como $\gamma > \alpha$ y $\alpha \geq \theta \Rightarrow \gamma > \theta$

  $\Rightarrow \theta < \gamma$, por t. correspondencia:

$$y < BQ \qquad \ldots (I)$$

- Por t. de existencia:

  En ΔAPR: $\quad x < AP + PR \qquad \ldots (II)$

  En ΔRQC: $\quad z < RQ + QC \qquad \ldots (III)$

  En ΔPBQ: como $\beta \leq \theta$, por teorema de la correspondencia:

$$PQ \leq PB \qquad \ldots (IV)$$

- Sumando (I), (II), (III) y (IV)

$x+y+z+PQ<(AP+PB)+(BQ+QC)+(PQ+RQ)$

$\Rightarrow x+y+z+\cancel{PQ}<c+a+(\cancel{PQ})$

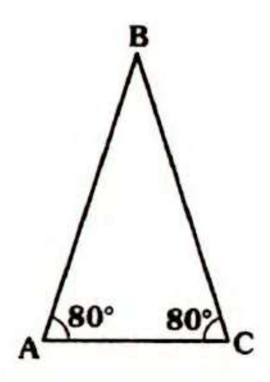
$\therefore x+y+z<a+c$

Observación

Si las longitudes de los lados de un triángulo son a , b y c tal que: $a \geq c \geq b$*, las distancias hacia los vértices de un punto interior son x, y, z,, del teorema 42 y 50, se cumple:*

$$\frac{a+b+c}{2}<x+y+z<a+c$$

TEOREMA 51



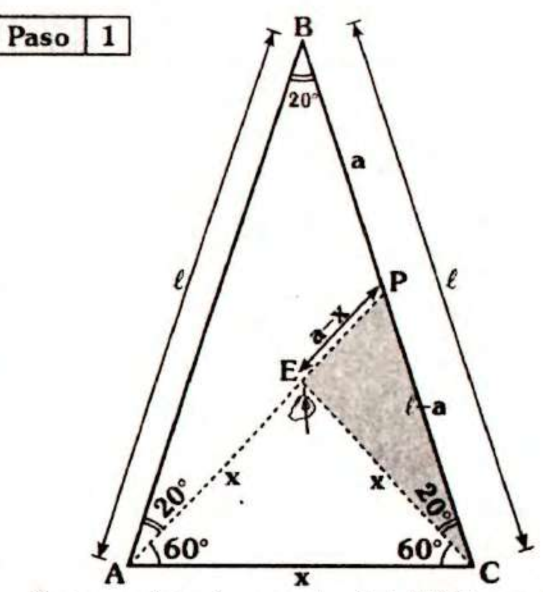
En el gráfico se cumple:

$$2<\frac{AB}{AC}<3$$

Demostración

- Como por condición las medidas angulares ya están dadas, significa que la razón $\frac{AB}{AC}$ también está dado, lo que el teorema afirma es que dicha razón se puede acotar. Lo cual se va a demostrar.

Paso 1

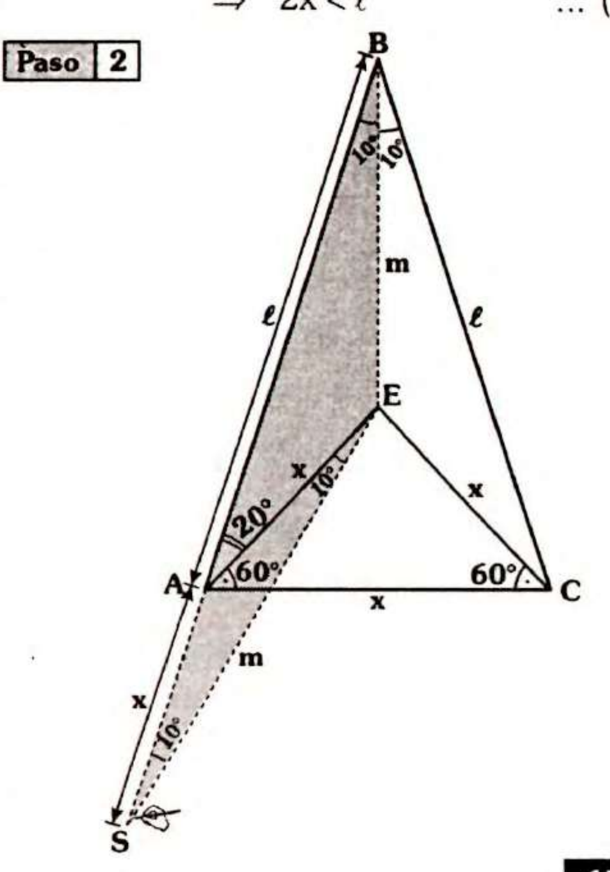


- Se traza interiormente el ΔAEC equilátero, con ello se tiene: $m\measuredangle EAB=20°$. Al prolongar $\overline{AE}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en P $\Rightarrow \Delta ABP$ isósceles $\Rightarrow$ $AP=PB=a$
- En ΔEPC: Por existencia

$x<(\ell-a)+(a-x)$

$\Rightarrow \quad 2x<\ell \quad \ldots$ (I)

Paso 2



- En la prolongación de $\overline{BA}$ se ubica S tal que $AS = x$

$\Rightarrow \Delta EBS$: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle AES = m\measuredangle ASE = 10°$

$\Rightarrow BE = ES = m$

- Por t. existencia:

$\Delta AEB: \quad \ell < m + x \quad \ldots (\alpha)$

$\Delta AES: \quad m < 2x$

$\Rightarrow m + x < 2x + x \quad \ldots (\beta)$

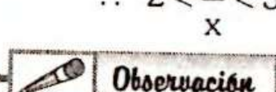
De (α) y (β):

$\ell < m + x < 3x$

$\therefore \ \ell < 3x \quad \ldots (\ell)$

- De (I) y (II): $2x < \ell < 3x$

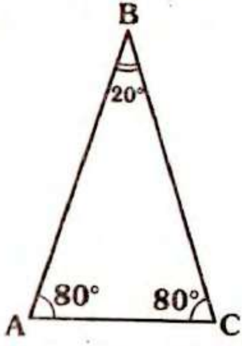
$$\therefore \ 2 < \frac{\ell}{x} < 3$$



La demostración del teorema anterior es equivalente a demostrar:

$$2 < \frac{\text{sen}\,80°}{\text{sen}\,20°} < 3$$

Debido a que:



Por ley de senos:

$$\frac{\ell}{x} = \frac{\text{sen}\,80°}{\text{sen}\,20°}$$

TEOREMA 52

El siguiente teorema se ha incluido en esta publicación pese a que se trata de un gráfico espacial.

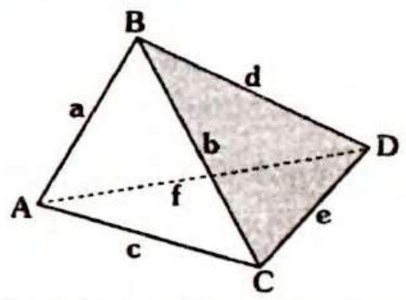
Sólo se requiere conocer que un tetraedro es un sólido limitado por cuatro regiones triangulares y que los lados se llamarán aristas.

Enunciado del teorema:

"En un tetraedro existe por lo menos un vértice tal que con las aristas concurrentes en él, se puede formar un triángulo".

Demostración

- Consideremos:



- En primer lugar observe los cuatro triángulos: ΔABC, ΔBCD, ΔADB y ΔACD.
- Consideremos también que para el vértice B, con respecto a las aristas: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ hay dos posibilidades:
  - **i)** Si forman un triángulo, con ello ya estaría demostrado.
  - **ii)** Si no forman un triángulo se tendrá que el triángulo se formará con las aristas que concurran en A, C o D.
- Analicemos (ii):

Si ***no se forma el triángulo***, se cumple entonces:

$b \geq a + d \quad \ldots (I)$

- Analizando las aristas que concurran en "C".

En ΔABD: $\quad a + d > f \quad \ldots (II)$

De (I) y (II): $\quad b \geq a + d > f$

$\Rightarrow \ b > f \quad \ldots (III)$

- En $\triangle ADC$:

$$e < f + c \quad \ldots (IV)$$

De (III) $f < b \Rightarrow f + c < b + c \quad \ldots (V)$

De (IV) y (V) se tendrá:

$$e < f + c < b + c$$

$$\Rightarrow \boxed{e < b + c} \quad \ldots(\alpha)$$

- En $\triangle ADC$: $c < f + e \quad \ldots (VI)$

Como $f < b \Rightarrow f + e < b + c \quad \ldots (VII)$

De (VI) y (VII):

$$c < f + e < b + e$$

$$\Rightarrow \boxed{c < b + e} \quad \ldots(\beta)$$

- En $\triangle BCD$: $b < d + e \quad \ldots (VIII)$

De (I) y (VIII):

$$a + d \leq b < d + e$$

$$\Rightarrow a + \cancel{d} < \cancel{d} + e$$

$$\Rightarrow a < e$$

$$\Rightarrow a + c < e + c \quad \ldots (IX)$$

- En $\triangle ABC$: $b < a + c \quad \ldots (X)$

De (IX) y (X):

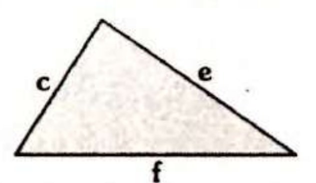
$$b < a + c < e + c$$

$$\Rightarrow \boxed{b < e + c} \quad \ldots(\gamma)$$

- De (α), (β) y (γ):

$$e < b + c$$
$$c < b + e$$
$$b < e + c$$

- Se concluye que con $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ se podrá formar un triángulo.



TEOREMA 53

Dados cinco segmentos, tales que con cualquiera de ellos es posible construir un triángulo se cumple que al menos uno de ellos es acutángulo.

Demostración

- Sean a, b, c, d, y e las longitudes de los segmentos, tales que:

$$a \leq b \leq c \leq d \leq e \quad \ldots (I)$$

- Se puede notar que se formarán 10 triángulos (ya que $C_3^5 = 10$), el teorema nos afirma que por lo menos uno de ellos es acutángulo.
- Cada triángulo tiene sólo tres posibilidades; es acutángulo, rectángulo o obtusángulo, los lados se relacionan por la nota indicada en la página 25.
- Consideremos los triángulos de lados (a, b, c) y (c, d, e) si los triángulos fueran acutángulos cumplen:

$$c^2 < a^2 + b^2 \quad y \quad e^2 < c^2 + d^2$$

- Usaremos el método del absurdo, es decir, ***supongamos que no se cumple*** lo anterior, es decir:

$$c^2 \geq a^2 + b^2 \ y \ e^2 \geq c^2 + d^2 \quad \ldots(\alpha)$$

- Considerando la siguiente desigualdad [5]:

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \quad \ldots (\beta)$$

[5] *ver anexos, desigualdad de la media cuadrática*

Como:

$$c^2 \geq a^2 + b^2 \Rightarrow 2c^2 \geq 2(a^2 + b^2) \ldots \text{(II)}$$

De (β) y (II): $2c^2 \geq (a+b)^2$ ... (III)

De (α) : $e^2 \geq c^2 + d^2$ ... (IV)

De (I): $d^2 \geq c^2$ ... (V)

- Sumando (III), (IV) y (V):

$$e^2 \geq (a+b)^2$$

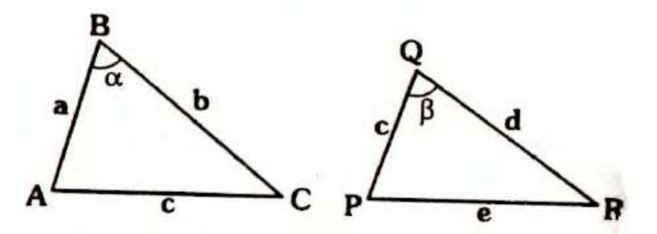
$$\Rightarrow e \geq a + b \quad \ldots \text{(VI)}$$

Pero con a, b y e es posible formar, se debe cumplir :

$$e < a + b \quad \ldots \text{(VII)}$$

(VI) y (VII) son contradictoria, entonces nuestra suposición es falsa, es decir se cumple:

$$c^2 < a^2 + b^2 \quad \text{o} \quad e^2 < c^2 + d^2$$



- Como "c" es el lado mayor en el ΔABC y como:

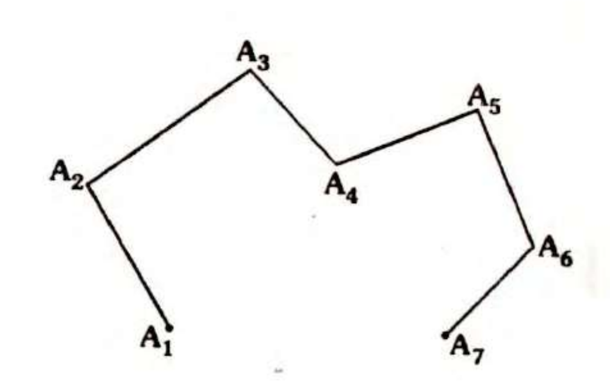
$$c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow \text{el } \Delta ABC$$

es acutángulo para el ΔPQR ocurre algo análogo.

POLIGONAL

Consideremos en un plano n puntos $(n \geq 3$ y $n \in \mathbb{N})$, tales como $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, se define la poligonal o línea quebrada como la unión de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ ... y $\overline{A_{n-1}A_n}$ con las siguientes condiciones:

- Dos segmentos consecutivos no deben estar en la misma recta.
- Los segmentos tengan en común a lo mas los extremos.



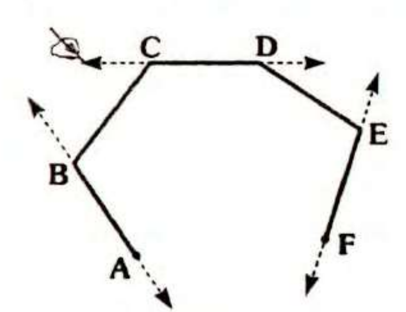
En el gráfico, $n = 7$

$$\text{poligonal} = \left\{\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_4} \cup \overline{A_4A_5} \cup \overline{A_5A_6} \cup \overline{A_6A_7}\right\}$$

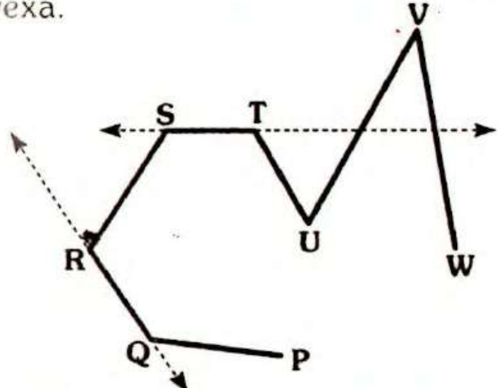
A los segmentos se les denomina lados y a los puntos A_1 y A_7 se les llama extremos.

POLIGONAL CONVEXA

Si toda recta que contiene a un lado ubica a la poligonal en un mismo semiplano, a la poligonal se le llamará convexa.



En el gráfico, ABCDEF es una poligonal convexa.



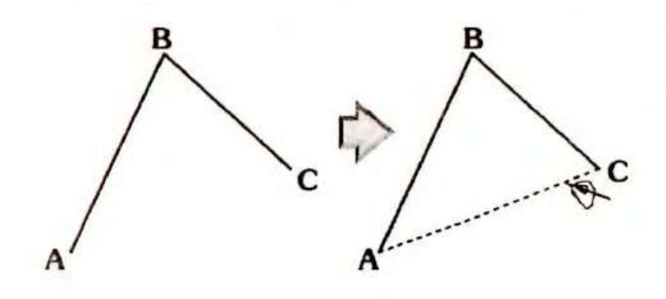
En el gráfico, la poligonal PQRSTUVW es no convexa.

TEOREMA 54

En toda poligonal la distancia entre los extremos es menor entre los extremos es menor que la suma de longitudes de todos los lados de la poligonal.

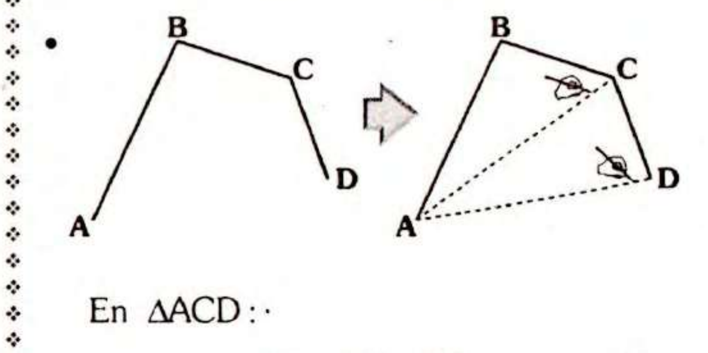
Demostración

- Consideremos las siguientes poligonales.



- Por teorema de existencia:

$$AC < AB + BC$$

- 

En ΔACD :

$$AD < AC + CD \qquad \text{... (I)}$$

En ΔABC :

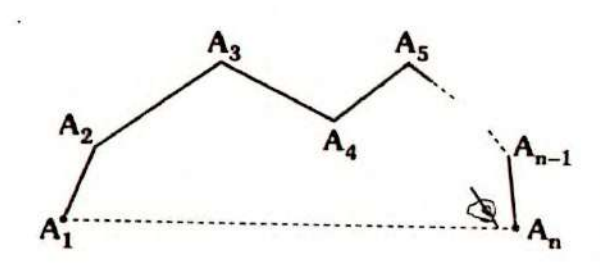
$$AC < AB + BC \qquad \text{... (II)}$$

De (I) y (II):

$$\Rightarrow AD < AB + BC + CD$$

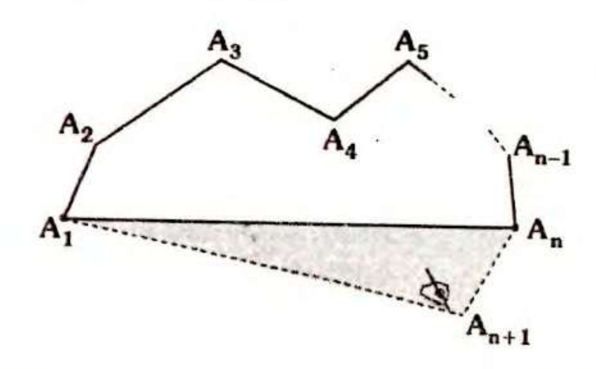
- Se puede ir aumentando lados o extremos demostrando el teorema, pero en realidad no garantizaría la veracidad del teorema. Usaremos para ello el método de inducción.[6]
- El método de inducción consta de las siguientes partes:
  - Demostrar para el menor valor, para el cual tiene sentido el teorema.
  - Supone que el teorema es válida para n, $n \in \mathbb{N}$ (*Hipótesis Inductiva*).
  - Demostrar que se cumple para $n+1$.
- La primera ya fue probado.
- Supongamos que es válida para "n".

[6] Sobre el método del inducción, ver anexos.



$$A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots A_{n-1}A_n \quad \ldots(\alpha)$$

- Demostremos que se cumple para $n+1$.
- Consideremos la poligonal $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_{n+1}$



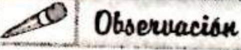
- El punto A_{n+1}, no debe ser colineal con A_{n-1} y A_n o con A_1A_2 (por definición).
- En $\Delta A_1A_nA_{n+1}$:

$$A_1A_{n+1} < A_1A_n + A_nA_{n+1} \qquad \ldots(\beta)$$

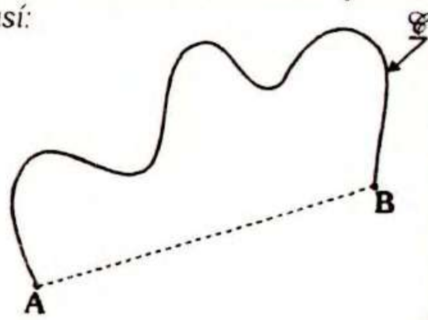
- Sumando (α) y (β):

$$A_1A_{n+1} < A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_{n+1}$$

Con lo cual queda demostrado el teorema $\forall n \in \mathbb{N}(n \geq 3)$.



- *La demostración es válida para una poligonal convexa y no convexa.*
- *Si ubicamos, dos puntos en un plano y trazamos la curva que los une así:*



ℓ: longitud de la curva $\mathscr{C}$

Se cumple: $AB < \ell$

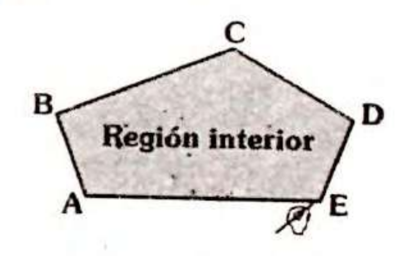
Para demostración de la última afirmación involucra elementos de cálculo superior, pero la mayor parte de la demostración ha sido indicada.

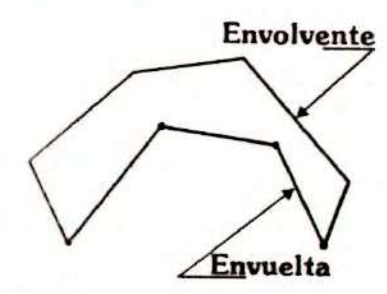
El paso final es definir la longitud de la curva como caso límite de la longitud de la poligonal cuyos vértices están en la curva.

ENVUELTA y ENVOLVENTE

Si unimos los extremos de una poligonal a la región limitada se le denominará región interior.

Si consideramos ahora dos poligonales con los mismos extremos y una de ellas se ubica en la región interior de la otra, se le denomina envuelta y a la otra envolvente.



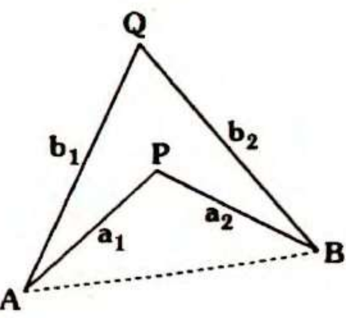


TEOREMA 55

La longitud de toda línea poligonal convexa es menor que la longitud de la poligonal que la envuelve.

Demostración

- Podemos partir, así; que la envuelta y la envolvente tengan igual cantidad de lados.

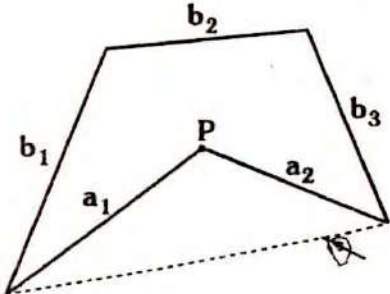


- Lo cual ya fue probado (*ver teorema* 40)

Se cumple entonces:

$$a_1 + a_2 < b_1 + b_2$$

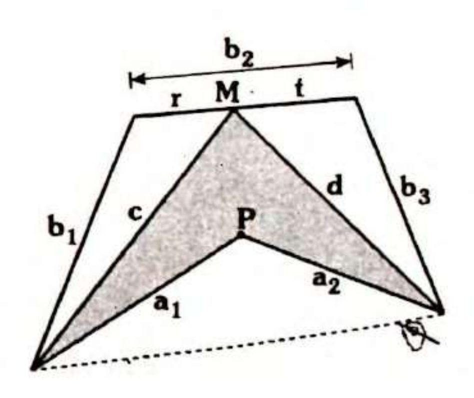
- Podemos hacer una serie de variantes así:



Se cumple:

$$a_1 + a_2 < b_1 + b_2 + b_3$$

Lo cual se prueba de la siguiente forma



En A : $a_1 + a_2 < c + d$ ... (I)

En ΔAQM : $c < b_1 + r$ ... (II)

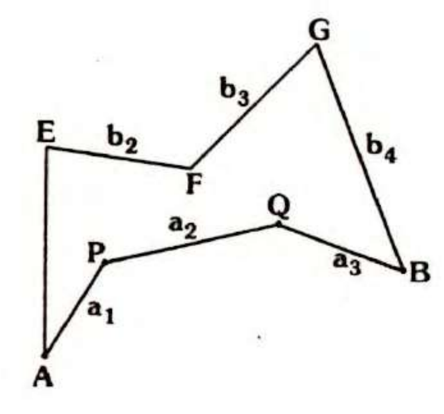
En ΔMRB : $d < b_3 + t$ ... (III)

Sumando (I), (II) y (III):

$$a_1 + a_2 + c + d < c + d + b_1 + b_3 + \underbrace{r + t}_{b_2}$$

$$a_1 + a_2 < b_1 + b_2 + b_3$$

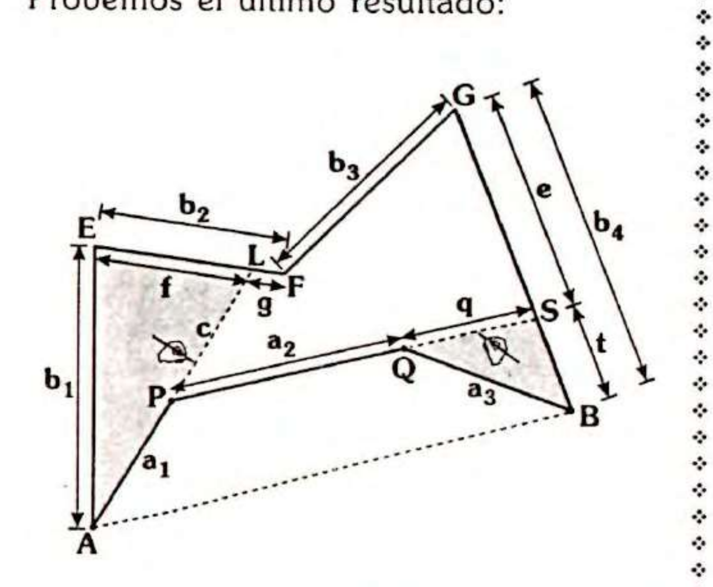
- Ahora podemos considerar la siguiente figura:



Se cumple:

$$a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

Probemos el último resultado:



En ΔAEF : $a_1 + c < b_1 + f$ ... (I)

En ΔQSB : $a_3 > q + t$ ... (II)

Por teorema 54

Para P y S:

$$a_2 + q < c + g + b_3 + \theta \quad ...(III)$$

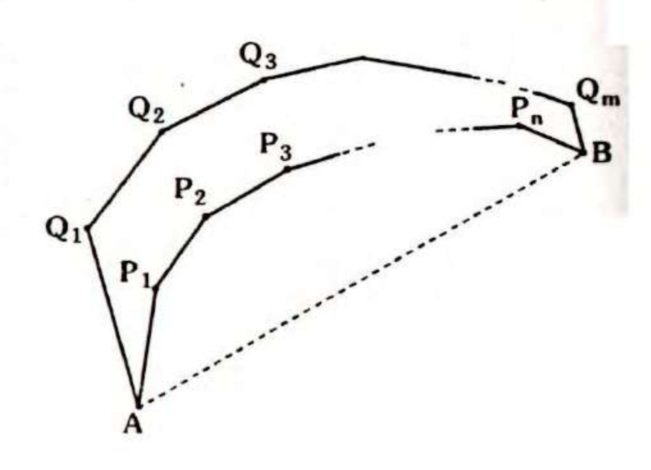
Sumando (I), (II) y (III):

$$a_1 + a_2 + a_3 + c + q < b_1 + \underbrace{(f+g)}_{b_2} + b_3 + \underbrace{(e+t)}_{b_4} + c + q$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

- Con lo cual queda probado el resultado, pero no podemos aún decir que el teorema ya fue probado. Es que solo hemos demostrado para casos particulares.

- Demostremos el teorema cuando ambas (la envuelta y la envolvente) son convexas.

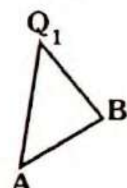


Demostraremos:

$$\boxed{AP_1 + P_1P_2 + ... + P_nB < AQ_1 + Q_1Q_2 + ... + Q_mB}$$

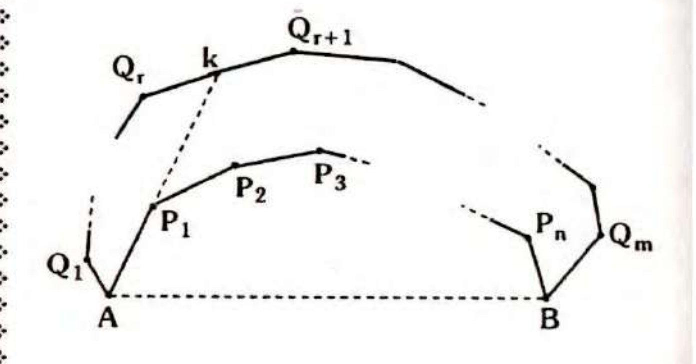
- Sea $n \geq 0$ y $m \geq 1$
- Por inducción fuerte em $m+n$
- Si $m+n=1$, es decir: $n=0$ y $m=1$

lo cual es cierto, por la desigualdad triangular:



- Supongamos que la hipótesis es cierta para: $1 \leq m + n \leq k$
- Demostraremos que es válida para:

$$m + n = k + 1$$



- Notemos que $1 \leq r \leq m$ y que B representa a Q_{m+1}
- Por teorema (54):

$$AP_1 + P_1k < AQ_1 + Q_1Q_2 + ... + Q_rk \qquad ...(\alpha)$$

- Por hipótesis:

$$P_1P_2 + P_2P_3 + ... + P_nB < P_1k + kQ_{r+1} + ... + Q_mB \qquad ...(\beta)$$

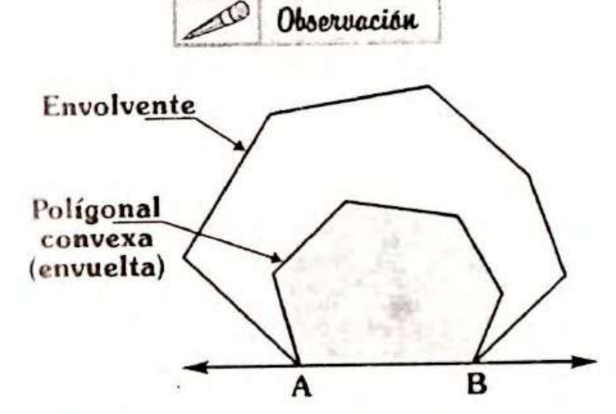
- Sumando (α) y (β):

$$AP_1 + \cancel{P_1k} + P_1P_2 + P_2P_3 + ... + P_nB < AQ_1 + Q_1Q_2 + ... + Q_rk + \cancel{P_1k} + kQ_{r+1} + ... + Q_mB$$

$$\therefore \boxed{AP_1 + P_1P_2 + ... + P_nB < AQ_1 + Q_1Q_2 + ... + Q_mB}$$

Con lo cual queda ya probado el teorema.

Observación



Sea ℓ_1 *: longitud de la envolente.*
ℓ_2 *: longitud de la envuelta.*

Del teorema anterior se demuestra:

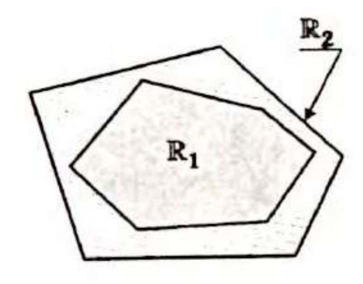
Como: $\ell_1 < \ell_2 \Rightarrow \underbrace{\ell_1 + AB}_{p_1} < \underbrace{\ell_2 + AB}_{p_2}$

$\Rightarrow p_1 < p_2$

p_1 *: perímetro de la región limitada por la envuelta y* $\overline{AB}$.

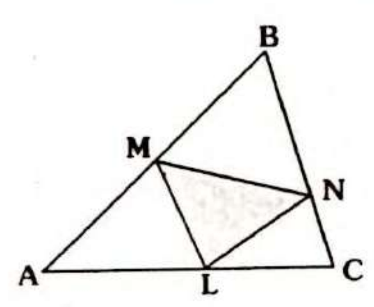
p_2 *: perímetro de la región limitada por la envolvente y* $\overline{AB}$.

CASOS PARTICULARES



- Si $\mathbb{R}_1$ es convexo y es interior a $\mathbb{R}_2$
Se cumple:

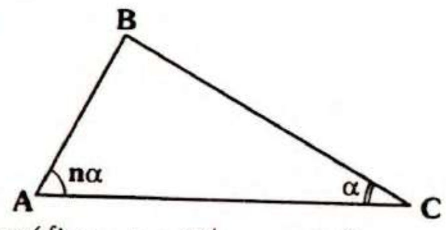
$$\boxed{\textbf{Perímetro}_{(\mathbb{R}_1)} < \textbf{Perímetro}_{(\mathbb{R}_2)}}$$



- Se cumple

$$\boxed{\textbf{Perímetro}_{(\blacktriangle MNL)} < \textbf{Perímetro}_{(\blacktriangle ABC)}}$$

TEOREMA 56



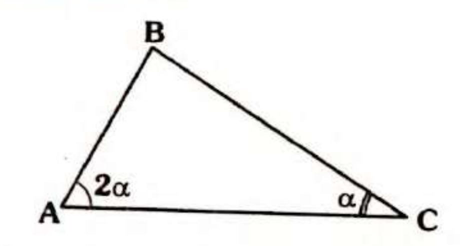
En el gráfico, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$
Se cumple:

$AB < BC < n(AB)$

Demostración

- La primera parte, es directo, puesto que $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq 2 \Rightarrow n\alpha \geq 2\alpha > \alpha$
  Por teorema de la correspondencia:
  Como $n\alpha > \alpha \Rightarrow BC > AB$
- Para la segunda parte, $BC < n(AB)$ usaremos inducción

Cuando $n = 2$

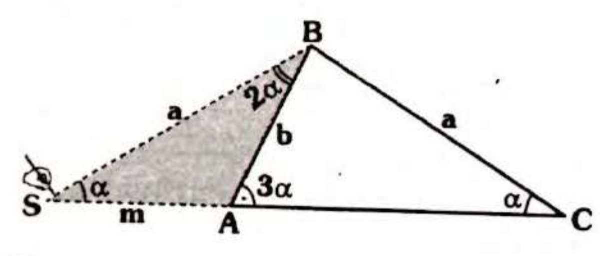


Por teorema 39: $BC < 2(AB)$

- Antes de indicar la hipótesis inductiva, analicemos para: $n = 3$ (De forma ilustrativa, lo cual nos dará la idea para el caso general).

Cuando $n = 3$

Ya fue probado (teorema 40), veamos otra forma:



- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta S, tal que:

$$m\sphericalangle ASB = x \Rightarrow \Delta SBC$$

es isósceles $\Rightarrow$ $SB = BS = a$

- En ΔSAB , por lo anterior :

$$m < 2b \qquad \text{... (I)}$$

ΔSAB , por existencia

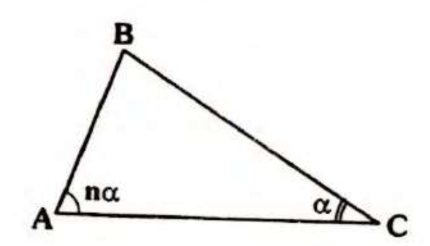
$$a < m + b \qquad \text{... (II)}$$

- Sumando (I) y (II):

$$a + m < m + 3b$$

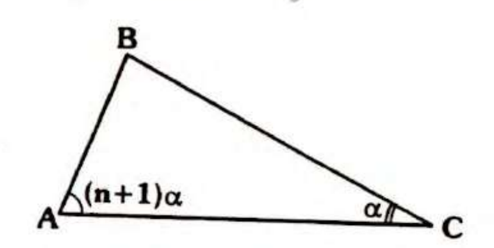
$$\Rightarrow a < 3b$$

- Ahora sí, procedamos como se ha indicado en un prueba por inducción.
- Supongamos que se cumpla para n, $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$

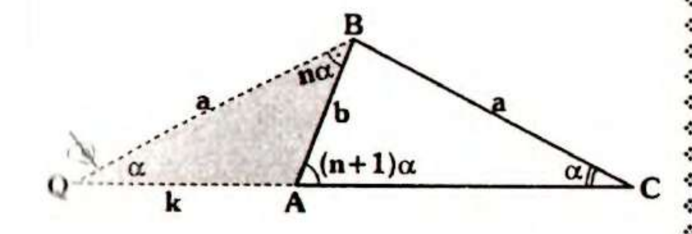


hipótesis inductiva: $BC < n(AB)$

- Probemos para "$n + 1$":



- En forma análoga al caso de $n = 3$



- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta Q tal que $m\measuredangle CQB = \alpha \Rightarrow \Delta QBC$ es isósceles

$$\Rightarrow QB = BC = a$$

Como :

$$m\measuredangle AQB = \alpha \Rightarrow m\measuredangle QBA = n\alpha$$

- En ΔQAB :

  - Por hipótesis inductiva:
  $$k < nb \qquad \dots (I)$$
  - Por existencia $a < k + b$ $\qquad \dots (II)$

- De (I) y (II): $a + k < k + (n+1)b$

$$\therefore a < (n+1)b$$

Con lo cual queda concluida la demostración.

Otra forma:

- Como para $n = 2$ ya fue aprobado y $n \geq 2 \Rightarrow n(AB) \geq 2(AB)$

Pero: $2(AB) > BC \Rightarrow n(AB) \geq 2(AB) > BC$

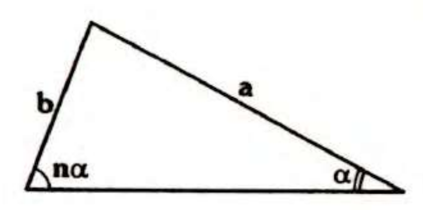
$$\therefore BC < n(AB)$$


Observación

- *La prueba realizada es equivalente a probar:*

$$1 < \frac{\text{sen}(n\alpha)}{\text{sen}\alpha} < n$$

$$(n \in \mathbb{Z}^+ \text{ , } n \geq 2)$$



$$\frac{\text{sen}\, n\alpha}{\text{sen}\, \alpha} = \frac{a}{b}$$

Como $a < nb$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < n$$

- *Analizando:*

$$1 < \frac{a}{b} < n$$

ello no implica que sea 1 la mayor cota superior ni "n" la menor cota inferior, pero nos dá un intervalo. Por ejemplo en el teorema 51, cuando $n = 4$ *y* $x = 20°$, *se cumple* $1 < \frac{a}{b} < 4$, *lo cual es verdadero, pero se demostró:*

$$1 < \frac{a}{b} < 3$$

ANÁLISIS DE ALGUNOS DOBLECES PARA OBTENER LÍNEAS NOTABLES

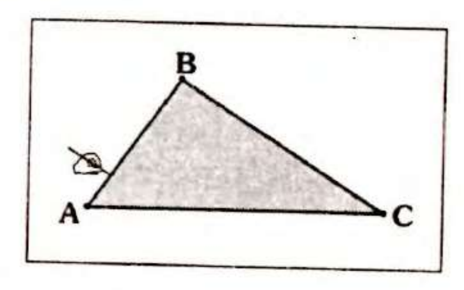
Toda persona interesada en educación matemática, reconoce el hecho que para aprender matemáticas hay que hacer matemáticas. Siendo en algunas etapas importante el aspecto manipulativo, por ello no es raro encontrar multitud de materiales y recursos como TAMGRAM, GEOPLANOS, VARILLAS, TROQUELES, etc, que potencian el hecho de hacer matemáticas.

El recurso más usual es el papel y no por ello menos atractivo.

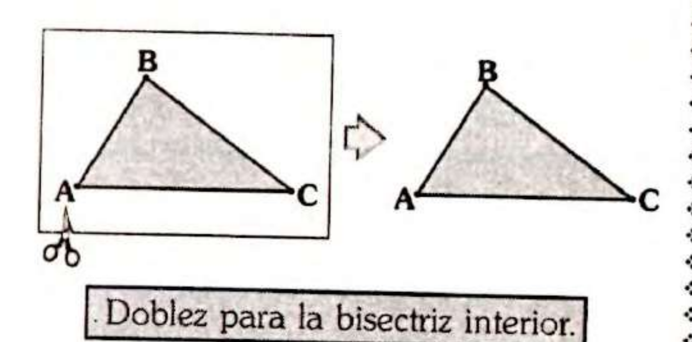
Se llama papiroflexía (también llamado ORIGAMI) como el arte de realizar figuras doblando papel, sin cortar ni pegar.

Las relaciones entre matemáticas y origami son hoy en día fuentes de investigación, se han realizado la elaboración de un sistema axiomático (axiomas de Huzita). En esta publicación no mencionaremos dichos axiomas, al lector interesado en la bibliografía le indicaré algunas páginas y unos textos concernientes al tema.

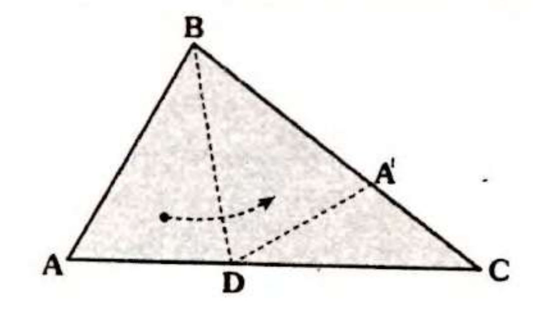
- Trazamos un triángulo sobre una hoja de papel



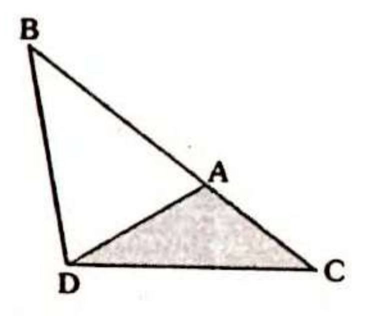
- Enseguida recortamos



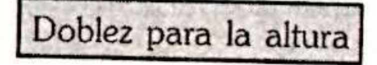
Doblez para la bisectriz interior.

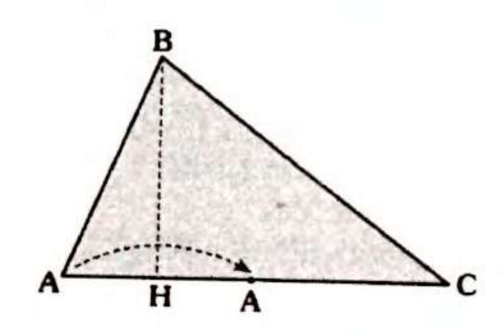


- Si llevamos A sobre $\overline{BC}$.

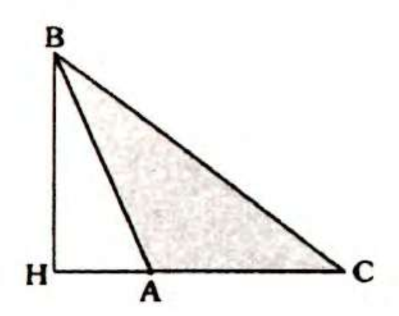


- El resultado de este doblez nos da la bisectriz interior $(\overline{BD})$



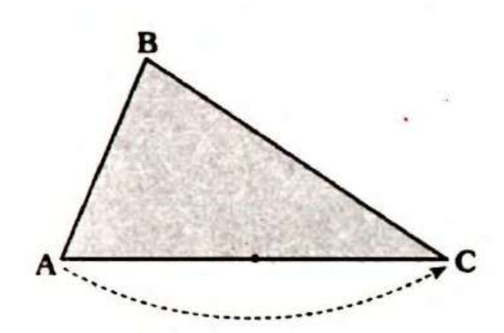


- Llevamos A hacia $\overline{AC}$, haciendo el doblez desde B.

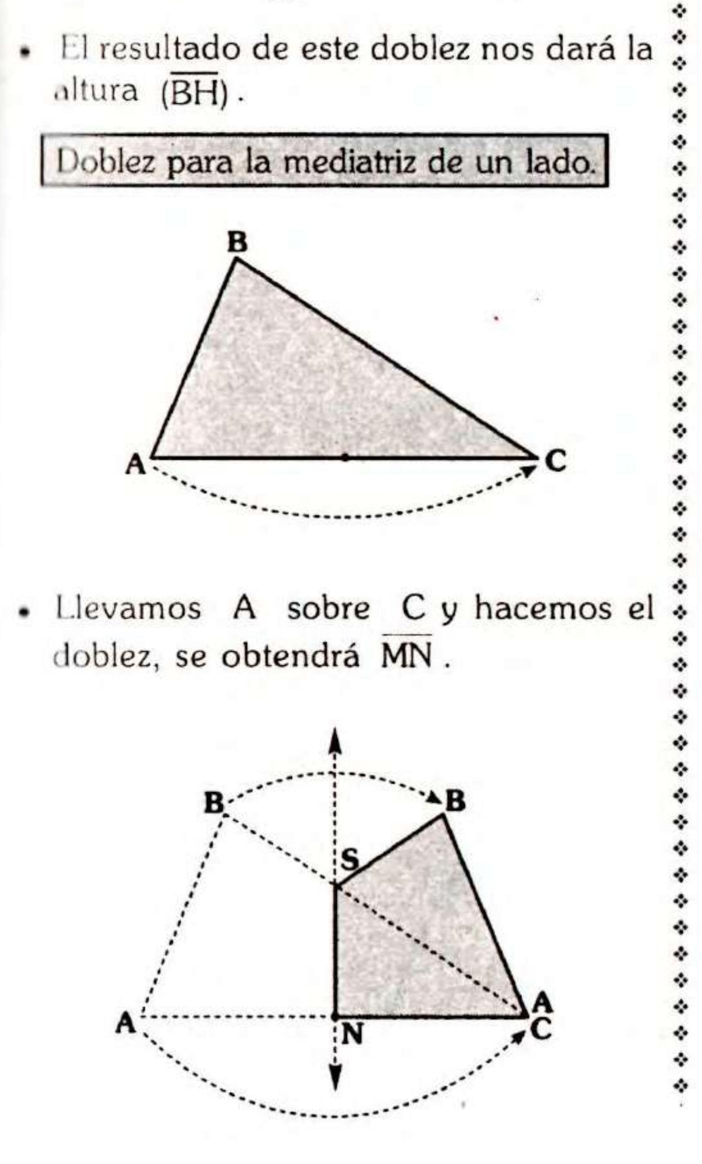


- El resultado de este doblez nos dará la altura ($\overline{BH}$).

Doblez para la mediatriz de un lado.



- Llevamos A sobre C y hacemos el doblez, se obtendrá $\overline{MN}$.



- $\overline{SN}$ representará parte de la mediatriz de $\overline{AC}$ (notar $m\measuredangle ANS = m\measuredangle SNC = 90°$ y $AN = NC$).

Observaciones

- *Del último doblez se obtiene la mediana desde B (haciendo el doblez de borde $\overline{BN}$)*
- *En realidad si llevamos A sobre cualquier punto de $\overline{AC}$, se obtendrá el doblez de un segmento perpendicular a $\overline{AC}$.*
- *Para obtener algún doblez que se relacione con la bisectriz exterior o una altura (en el triángulo obtusángulo), se requiere representar la región exterior con parte del papel.*



TEOREMA DE MORLEY

Al trisecar los ángulos internos como externos del triángulo ABC, se tiene que los triángulos DEF, GHI, JKL y MNP son equiláteros.

(Una forma de la demostración se encuentra en la publicación de "Puntos Notables" - Pág. 180)

Geometría

ENUNCIADO DE LOS

PROBLEMAS RESUELTOS

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

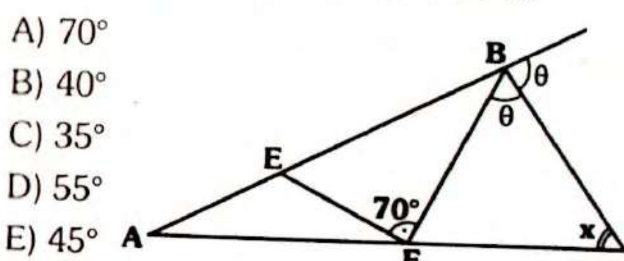
TRIÁNGULOS



PROBLEMA Nº 1

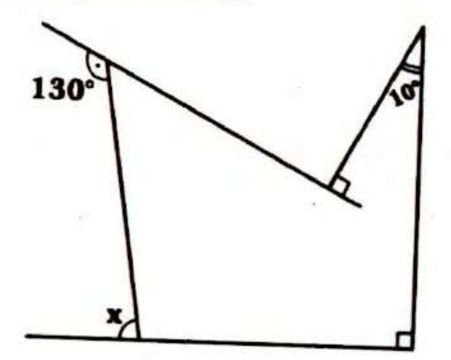
En el gráfico, AE=EF. Calcule **x**.

A) 70°
B) 40°
C) 35°
D) 55°
E) 45°



PROBLEMA Nº 2

Del gráfico, calcule **x**.

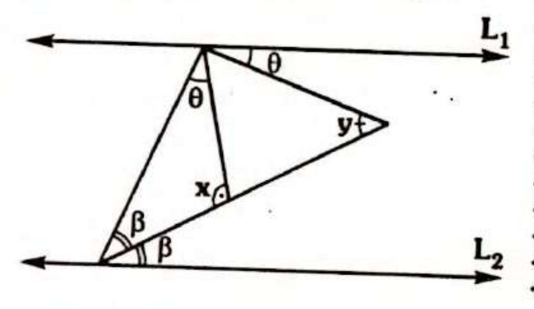


A) 40°
B) 45°
C) 60°
D) 65°
E) 70°

PROBLEMA Nº 3

En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule $x+y$.

A) 90°
B) 120°
C) 135°
D) 180°
E) 270°



PROBLEMA Nº 4

En el triángulo ABC se ubican P, Q y M en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{PQ}$ respectivamente. Si $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{CM}$ son bisectrices de los ángulos BAC y ACB respectivamente y $\overline{PQ} // \overline{AC}$. Si: $AP+QC=6$.

Calcule PQ

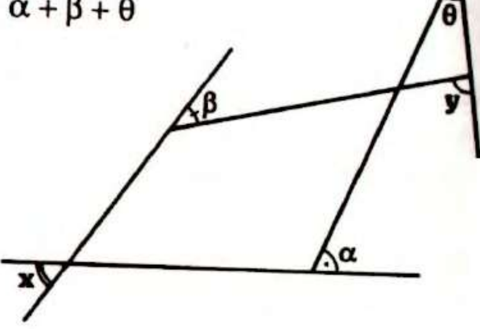
A) 12
B) 3
C) 9
D) 6
E) 4,5

PROBLEMA Nº 5

En el gráfico, $x+y=80°$,

Calcule $\alpha+\beta+\theta$

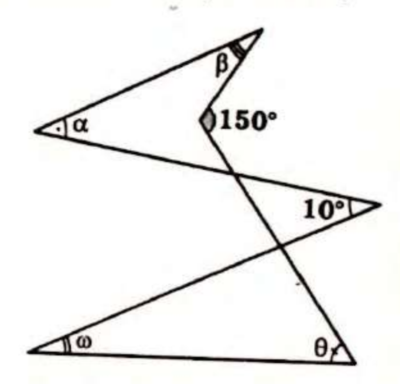
A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 80°
E) 45°



PROBLEMA Nº 6

En el gráfico, calcule $\alpha+\beta+\theta+\omega$.

A) 140°
B) 160°
C) 170°
D) 130°
E) 180°



PROBLEMA Nº 7

Se tiene el triángulo ABC, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica D, Si $m\measuredangle BDA = 2(m\measuredangle BCA) = 20°$, AC = AD y BC = CD. Calcule $m\measuredangle CAD$

A) 40° B) 50° C) 80°
D) 50° E) 45°

PROBLEMA Nº 8

En el triángulo ABC, se ubica D en $\overline{AC}$ tal que $m\measuredangle ABC = 80° + m\measuredangle BAC$ y DC = BC calcule $m\measuredangle ABD$

A) 40° B) 50° C) 65°
D) 80° E) 60°

PROBLEMA Nº 9

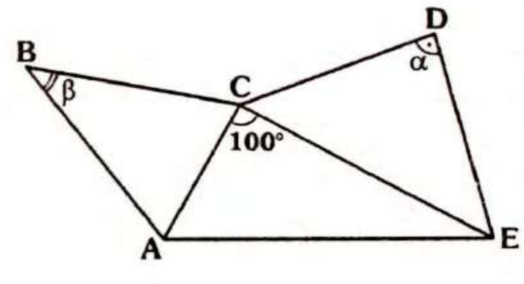
En el triángulo isósceles ABC de base BC, se traza la ceviana interior BM. Si AM = MB = BC, calcule $m\measuredangle MBC$.

A) 18° B) 30° C) 36°
D) 54° E) 45°

PROBLEMA Nº 10

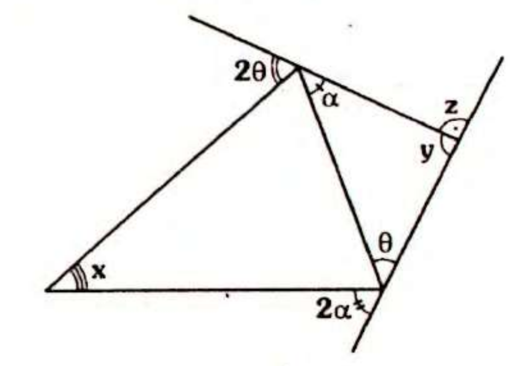
En el gráfico, los triángulos ABC y CDE son isósceles de bases $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$ respectivamente. Si $\alpha + \beta = 140°$, calcule $m\measuredangle BCD$.

A) 110°
B) 120°
C) 130°
D) 150°
E) 140°



PROBLEMA Nº 11

Del gráfico, calcule $\frac{x+y}{z}$.



A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2
D) 3 E) $\frac{1}{3}$

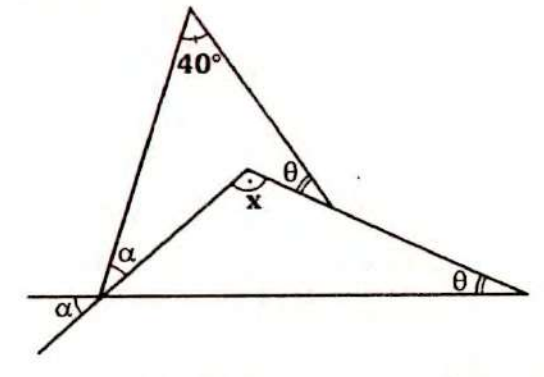
PROBLEMA Nº 12

Los lados de un triángulo isósceles miden 5cm y 12cm. Calcule el perímetro de la región triangular.

A) 22cm B) 29cm
C) 22 ó 29cm D) 27cm
E) 30cm

PROBLEMA Nº 13

Del gráfico, calcule **x**.



A) 100° B) 130° C) 110°
D) 120° E) 140°

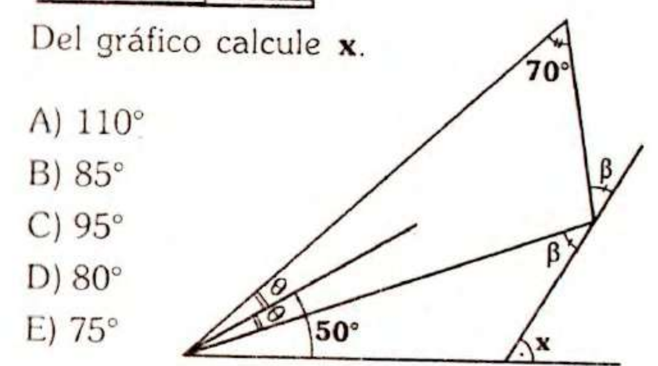
PROBLEMA Nº 14

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AM, tal que $AB = BM$ y $m\sphericalangle MAC = 10^\circ$. Calcule $m\sphericalangle BAC - m\sphericalangle BCA$

A) 10° B) 5° C) 20°
D) 7,5° E) 15°

PROBLEMA Nº 15

Del gráfico calcule **x**.



A) 110°
B) 85°
C) 95°
D) 80°
E) 75°

PROBLEMA Nº 16

En el triángulo ABC se trazan la bisectriz interior CD y la altura BH (H en $\overline{AC}$). Si $m\sphericalangle ABH = m\sphericalangle BCD$, $AH = 3$ y $HC = 4$. Calcule BC.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 17

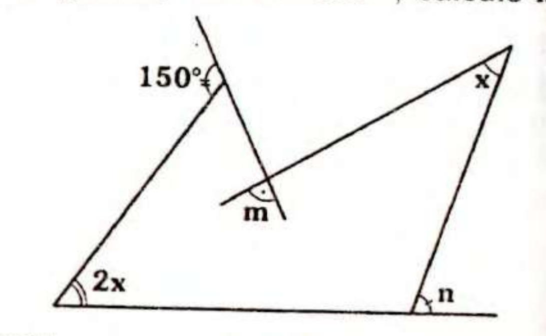
En el gráfico, $AB = AC$ y $DM = DC$

Calcule $x + y$

A) 200°
B) 240°
C) 300°
D) 280°
E) 260°

PROBLEMA Nº 18

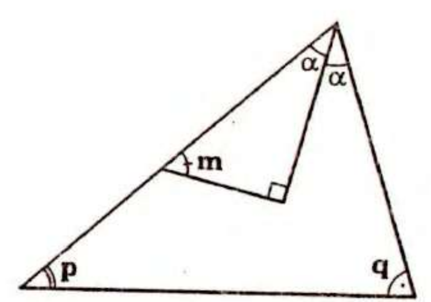
En el gráfico, $m + n = 150^\circ$, calcule **x**.



A) 20° B) 30° C) 35°
D) 25° E) 40°

PROBLEMA Nº 19

Indique la alternativa correcta en el gráfico.



A) $m = \frac{p-q}{2}$ B) $m = \frac{p+q}{2}$

C) $m = \frac{p+q}{3}$ D) $m = p + q$

E) $m = \frac{p+q}{4}$

PROBLEMA Nº 20

En el triángulo ABC, se cumple $m\sphericalangle ABC = 98^\circ$, luego se ubica D exterior y relativo a $\overline{AC}$. Si $AB = AD$, $m\sphericalangle CAD = x$, $m\sphericalangle BAC = 60^\circ - x$ y $m\sphericalangle ADC = 164^\circ$. Calcule x.

A) 6° B) 12° C) 10°
D) 8° E) 9°

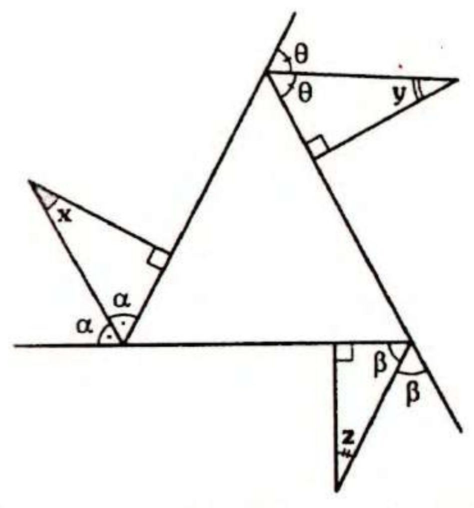
PROBLEMA Nº 21

En el triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$, se ubica E en la prolongación de $\overline{CB}$, desde el cual se traza la perpendicular a $\overline{AC}$, cortando a $\overline{AB}$ en F. Si $AF = 7$ y $CE = 29$. Calcule EB

A) 11 B) 10 C) 20
D) 22 E) 18

PROBLEMA Nº 22

Del gráfico, calcule $x + y + z$



A) 90° B) 180° C) 270°
D) 120° E) 135°

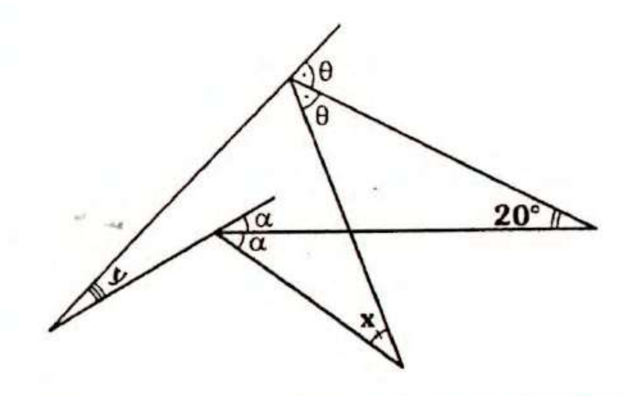
PROBLEMA Nº 23

En el triángulo rectángulo NPQ (recto en P) se trazan las cevianas interiores PB y QA, tal que $m\measuredangle PQN = 2(m\measuredangle NPB)$. Si $NP = AN + QB$. Calcule $m\measuredangle PAQ$.

A) 44° B) 45° C) 30°
D) 60° E) 56°

PROBLEMA Nº 24

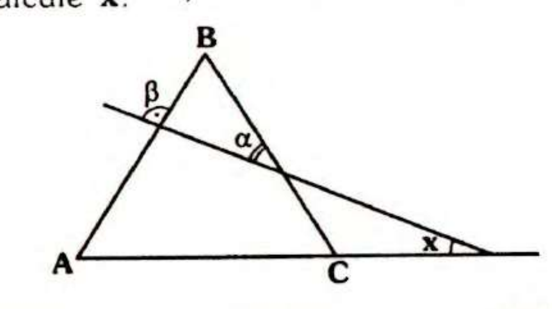
Del gráfico, calcule $x - y$



A) 10° B) 15° C) 20°
D) 40° E) 30°

PROBLEMA Nº 25

En el gráfico, $AB = BC$ y $\alpha + \beta = 40°$. Calcule **x**.



A) 40° B) 80° C) 70°
D) 45° E) 50°

PROBLEMA Nº 26

Los lados de un triángulo miden 10, a y 2a, calcule el menor valor entero de a.

A) 4 B) 3 C) 2
D) 5 E) 1

PROBLEMA Nº 27

Calcule el mayor valor entero de la longitud de un lado, si el perímetro de su región es 40.

A) 20 B) 21 C) 22
D) 19 E) 18

PROBLEMA Nº 28

En el triángulo ABC, se ubican los puntos D y E en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $m\measuredangle BCA = 60°$, $m\measuredangle AED = 35°$ y $BD = BC = EC$. Calcule $m\measuredangle BAC$

A) 60°   B) 80°   C) 50°
D) 70°   E) 40°

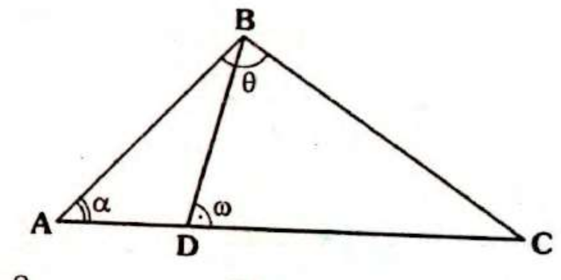
PROBLEMA Nº 29

Calcule el perímetro de una región triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 5 y 6 y el tercero tiene por longitud el doble de uno de los otros dos.

A) 19   B) 20   C) 22
D) 23   E) 21

PROBLEMA Nº 30

En el gráfico, $\alpha + \theta = 2\omega$, AD=3 y AC=8. Calcule BC.

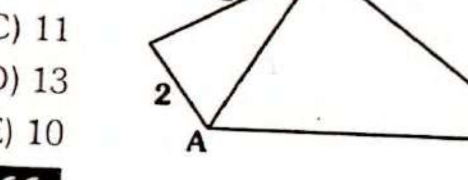


A) 3   B) 5   C) 6
D) 4   E) 2

PROBLEMA Nº 31

En el gráfico, calcule el mayor valor entero de AB+BC.

A) 8
B) 9
C) 11
D) 13
E) 10



PROBLEMA Nº 32

Calcule el perímetro de una región triangular, sabiendo que los lados tienen longitudes enteras y miden $2x-1$, $6-x$ y $3x-1$.

A) 6   B) 14   C) 12
D) 10   E) 15

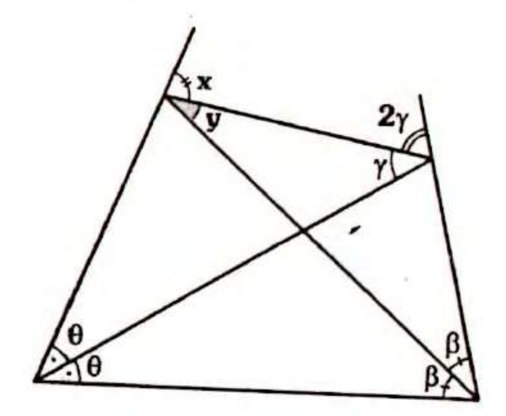
PROBLEMA Nº 33

En la región interior de un triángulo equilátero se ubica un punto, tal que la suma de distancias de dicho punto a los vértices es 9m. Calcule la longitud del lado del triángulo equilátero, sabiendo que es entera.

A) 5m   B) 4m   C) 3m
D) 1m   E) 2m

PROBLEMA Nº 34

Del gráfico, calcule x/y.



A) $\frac{1}{2}$ B) 3   C) $\frac{1}{3}$
D) 2   E) 1

PROBLEMA Nº 35

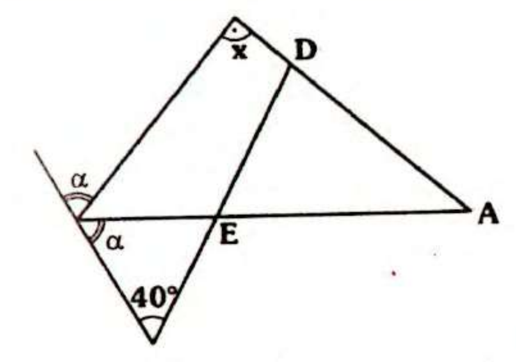
Se tiene el triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica D, tal que $m\measuredangle ACB = \alpha$, $m\measuredangle BAC = 2\alpha$ y

m∢DBC = 3α. Si AB=12 y BD=10. Calcule CD.

A) 21 B) 23 C) 18
D) 22 E) 20

PROBLEMA Nº 36

En el gráfico, AD=AE. Calcule **x**.



A) 100° B) 80° C) 85°
D) 90° E) 95°

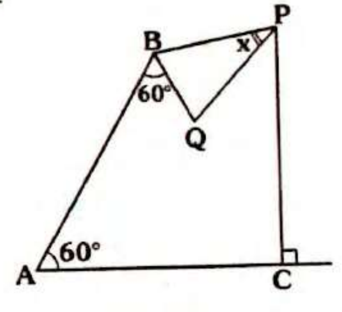
PROBLEMA Nº 37

En el triángulo ABD se ubica el punto C en la región exterior relativa a $\overline{AD}$ tal que AB = BC = AC = BD. Calcule m∢ADC

A) 30° B) 15° C) 40°
D) 45° E) 20°

PROBLEMA Nº 38

En el gráfico, AB=AC=PC y BP=PQ. Calcule **x**.



A) 25° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 30°

PROBLEMA Nº 39

En el triángulo ABC se cumple AB = 2 y m∢BAC = 2(m∢BCA). Calcule el valor de BC.

A) 2 B) 4 C) 3
D) 6 E) 5

PROBLEMA Nº 40

Se tiene el triángulo ABC(AB = BC), se ubica E, F y D en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si DF=EF y

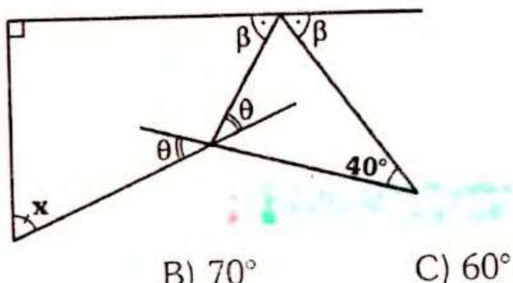
m∢BEF + m∢DFC = 78°.

Calcule m∢ADE

A) 39° B) 22° C) 24°
D) 32° E) 26°

PROBLEMA Nº 41

Del gráfico, calcule **x**.

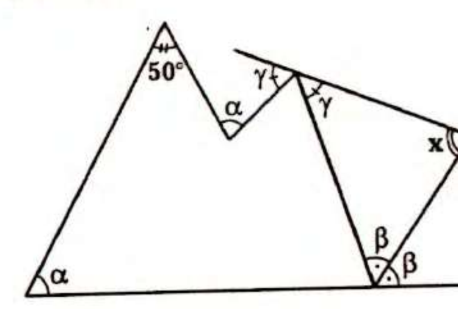


A) 80° B) 70° C) 60°
D) 65° E) 75°

PROBLEMA Nº 42

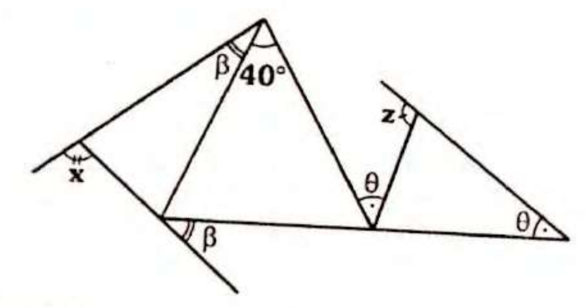
Del gráfico, calcule **x**.

A) 50°
B) 80°
C) 40°
D) 65°
E) 75°



PROBLEMA Nº 43

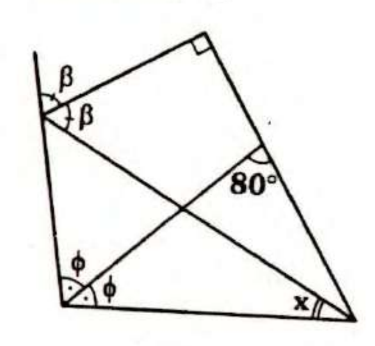
Del gráfico, calcule $z+x$.



A) 220°
B) 210°
C) 300°
D) 260°
E) 280°

PROBLEMA Nº 44

Del gráfico, calcule **x**.



A) 10°
B) 20°
C) 15°
D) 5°
E) 25°

PROBLEMA Nº 45

En el triángulo ABC, las bisectrices trazas de A y C se cortan en P. Si AP=6 y PC=8. Calcule el número de valores enteros de AC.

A) 0
B) 1
C) 3
D) 2
E) 4

PROBLEMA Nº 46

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior BF, si AF=a, AB=b y

$$m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$$

Calcule BC.

A) $a+b$
B) $\sqrt{a^2+b^2}$
C) $\sqrt{ab}$
D) $a-b$
E) $\frac{a+b}{2}$

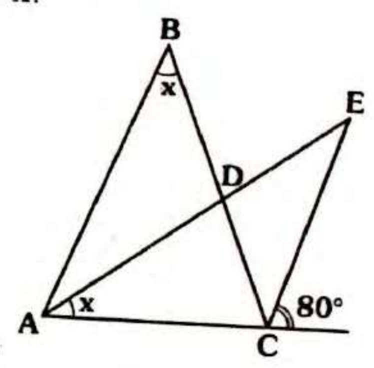
PROBLEMA Nº 47

En el triángulo isósceles ABC (AC=BC), se traza la bisectriz interior BR, tal que AB=BR. Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 24°
B) 36°
C) 30
D) 48°
E) 18°

PROBLEMA Nº 48

En el gráfico, AB=BC y AD=CE. Calcule **x**.



A) 40°
B) 50°
C) 30°
D) 60°
E) 20°

PROBLEMA Nº 49

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que AD=BC; BD=DC y $m\measuredangle BAC = m\measuredangle DBC$. Calcule $m\measuredangle BAC$

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 36°

PROBLEMA Nº 50

En el triángulo ABC se ubica el punto D, exterior y relativo a $\overline{AC}$, tal que $AB=BC=AD$, $m\measuredangle ACD=2x$ y

$m\sphericalangle ADC = 3(m\sphericalangle BAC) = 9x$

Calcule **x**.

A) 10° B) 15° C) 18°
D) 12° E) 20°

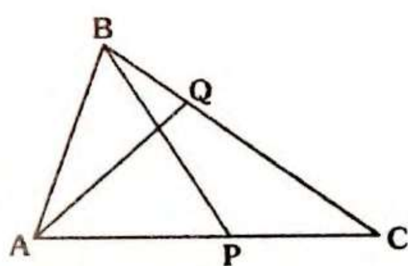
PROBLEMA Nº 51

En el triángulo rectángulo ABC (AB=BC), se ubica el punto F exterior y relativo a $\overline{AC}$, de modo que AB=CF y $m\sphericalangle ACF = 15°$. Calcule $m\sphericalangle CAF$

A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30

PROBLEMA Nº 52

En el gráfico, AB = AQ = m y BP = PC. Si m es par, calcule el menor entero de BP.



A) m − 1 B) $\frac{m}{2}+1$ C) $\frac{m}{2}-1$
D) $\frac{m}{2}-2$ E) m

PROBLEMA Nº 53

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B). Se trazan las cevianas interiores AM y CN tal que AN = MN = MC. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$.

A) 90° B) 120° C) 135°
D) 60° E) 108°

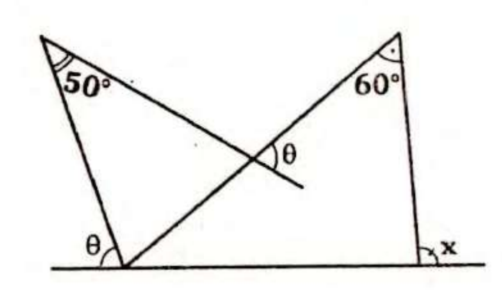
PROBLEMA Nº 54

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BP y BQ tal que PC=BC y AQ=AB. Si $m\sphericalangle ABC = 100°$. Calcule $m\sphericalangle PBQ$.

A) 80° B) 50° C) 70°
D) 25° E) 40°

PROBLEMA Nº 55

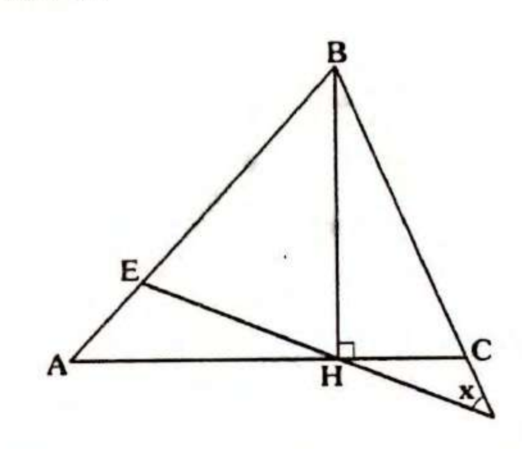
Del gráfico, calcule **x**.



A) 100° B) 80° C) 110°
D) 85° E) 120°

PROBLEMA Nº 56

En el gráfico, AB=AC y BH=BE. Calcule **x**.



A) 60° B) 45° C) 30°
D) 36° E) 72°

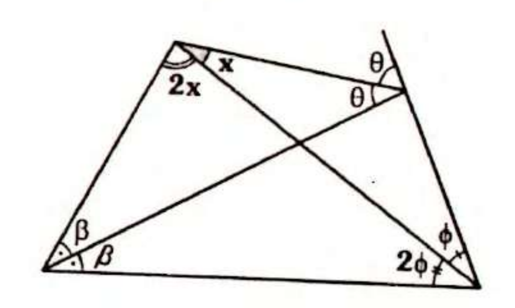
PROBLEMA Nº 57

En el triángulo ABC se cumple $m\measuredangle BCA = 2(m\measuredangle BAC) = 40°$. En la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica P, tal que $PC = AB + BC$. La medida del ángulo CPB es:

A) 20° B) 10° C) 15°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº 58

Del gráfico, calcule **x**.



A)30° B) 18° C) 20°
D) 36° E) 15°

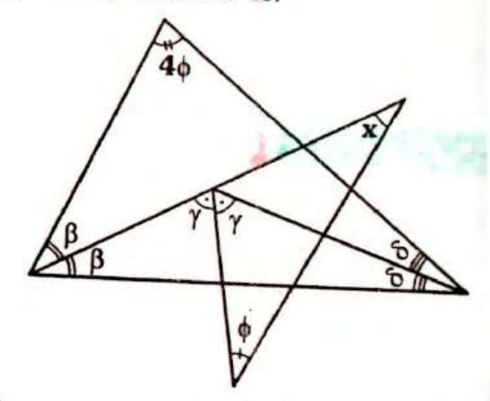
PROBLEMA Nº 59

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AF}$ y la altura $\overline{BH}$ secantes en M. Si $m\measuredangle FAC = 2(m\measuredangle HBC)$ y $AF=BC=6$. Calcule el mayor valor entero de AB.

A)10 B) 11 C) 13
D) 12 E) 9

PROBLEMA Nº 60

Del gráfico, calcule **x**.



A)30° B) 36° C) 72°
D) 45° E) 60°

Problemas Resueltos
Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA Nº 61

(1°P.C - 2001-II)

En un triángulo ABC; AB=BC; D ∈ $\overline{AC}$; E ∈ AD; AE=BC y m∢DBC = 2(m∢EBD). Calcule m∢BDA .

A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº 62 (SEMINARIO 2007-I)

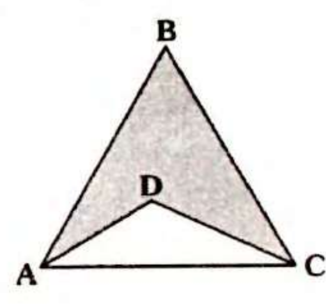
En un triángulo ABC sus lados miden AB = $\sqrt{x^2-1}$; BC=2 y AC=3. Entonces ¿cuántos valores enteros de **x** satisfacen la condición del triángulo?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

PROBLEMA Nº 63 (SEMINARIO 2007-I)

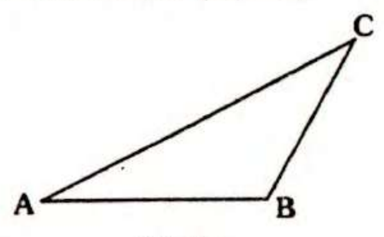
Calcule el menor valor expresado en números enteros de la parte sombreada, sabiendo que el perímetro del triángulo equilátero ABC es mayor que 33m; AD = 4m y CD=9m.

A) 30m
B) 38m
C) 36m
D) 37m
E) 40m



PROBLEMA Nº 64 (SEMINARIO 2007-II)

En la figura mostrada, se verifica AC=21u, BC=7u y AB=x, calcule el mayor valor entero de: (2x – 3)



A) 36 B) 52 C) 38
D) 39 E) 40

PROBLEMA Nº 65 (SEMINARIO 2007-II)

En el triángulo ABC se cumple que BC=7u y m∢A = 2m∢C . Se trazan la bisectriz interior BP y la bisectriz exterior BQ, Q pertenece a la prolongación de $\overline{CA}$. Calcule PQ.

A) 16 B) 15 C) 14
D) 13 E) 12

PROBLEMA Nº 66 (SEMINARIO 2003-II)

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior desde el vértice B, la cual interseca en H a la perpendicular trazada desde C a dicha bisectriz. Si m∢BAC – m∢BCA = 20° . Halle la medida del ángulo ACH.

A) 5° B) 7° C) 9°
D) 10° E) 20°

PROBLEMA Nº 67 (SEMINARIO 2003-II)

En el interior de un triángulo ABC se ubica D tal que BD=AC y

$$\frac{m\measuredangle ACD}{2}=\frac{m\measuredangle DCB}{3}=\frac{m\measuredangle BAD}{7}=$$

$m\measuredangle DAC = m\measuredangle DBC$.

Calcule $m\measuredangle ABD$.

A) 60° B) 50° C) 40°
D) 30° E) 20°

PROBLEMA Nº 68 (SEMINARIO 2003-II)

En un triángulo ABC, desde el vértice B se trazan las perpendiculares $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ a las bisectrices exteriores de los ángulos A y C. Si $m\measuredangle ABC=\theta$, entonces la $m\measuredangle PBQ$ es:

A) $90°+\frac{2}{3}\theta$ B) $90°+\theta$

C) $90°+\frac{\theta}{2}$ D) $90°+\frac{3}{4}\theta$

E) $90°+\frac{3}{5}\theta$

PROBLEMA Nº 69 (1era P.C. 2002-II)

En un triángulo ABC, $m\measuredangle A=60°$; $m\measuredangle C=10°$, sean los puntos $M\in\overline{AC}$ y $Q\in\overline{BC}$ de modo que $AB=BQ=AM$. Calcule $m\measuredangle QMC$.

A) 30° B) 35° C) 45°
D) 55° E) 70°

PROBLEMA Nº 70 (1era P.C. 2003-I)

Se tiene un triángulo ABC, en $\overline{BC}$ se ubican los puntos Q y S ($Q\in\overline{BS}$) y en $\overline{AC}$ se ubican los puntos P, R y T ($P\in\overline{AR}$ y $T\in\overline{RC}$).

Si $AB = BP = PQ = QR = RS = ST = TC$, calcule la medida del ángulo ACB sabiendo que es el mayor número entero.

A) 10° B) 13° C) 15°
D) 18° E) 14°

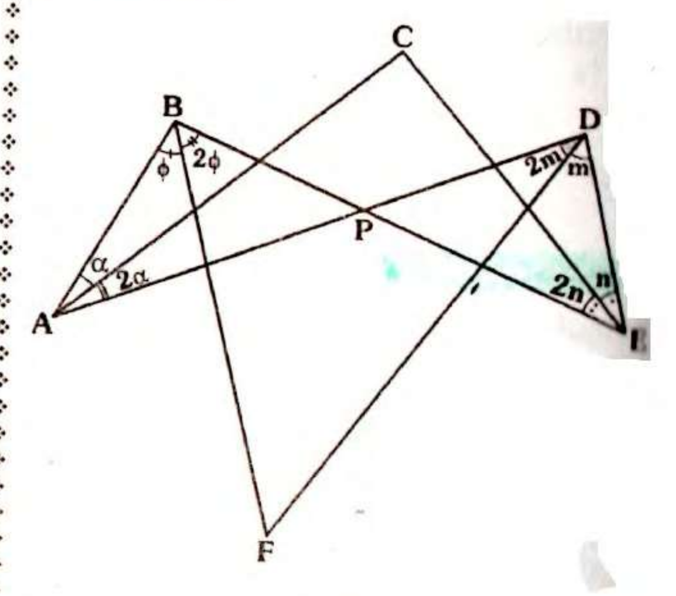
PROBLEMA Nº 71 (SEMINARIO 2006-II)

¿Cuántos triángulos isósceles existen de perímetro 18 y lados enteros?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 72

En la figura mostrada, se cumple $m\measuredangle ACE + m\measuredangle BFD = \omega$, entonces la $m\measuredangle BPD$ es:



A) 2ω B) $\frac{3}{2}\omega$ C) ω

D) $\frac{5}{3}\omega$ E) $\frac{2}{3}\omega$

PROBLEMA Nº 73 (SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores AF y BE que se intersecan en I. Si AI=b, BC=a y m∢BAC = 2(m∢BCA)

Entonces la longitud de $\overline{AB}$ es:

A) $\frac{(a-b)}{2}$ B) $a-b$ C) $\frac{a+b}{3}$

D) $\frac{(a+b)}{4}$ E) $2b-a$

PROBLEMA Nº 74 (1era P.C. 2003-II)

En un triángulo ABC, se ubica P exterior a dicho ángulo, tal que $\overline{AP}$ interseca a $\overline{BC}$. Si $BP=10u$, $BC=13u$ y $AP=11u$, luego el máximo valor entero (en u) del lado AC es:

A) 10 B) 11 C) 12

D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº 75 (1era P.C. 2005-I)

En un triángulo ABC se cumple m∢BCA = 18° y AB > BC. Entonces, el mínimo valor entero para la medida del ángulo ABC es:

A) 145° B) 144° C) 147°

D) 150° E) 153°

PROBLEMA Nº 76 (1era P.C. 2005-II)

Se tiene un triángulo ABC, AB=BC=a, donde **a** pertenece a los naturales, una recta secante interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en F y E respectivamente y a la prolongación de $\overline{AC}$ en D, si la m∢ADF > m∢ABC, AD=a y EF=3. El mínimo valor entero de la longitud del segmento DE es:

A) $a-4$ •B) $a-2$ C) $a-1$

D) $a+1$ E) $a+2$

PROBLEMA Nº 77 (1era P.C. 2007-I)

Se tiene el triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, diferentes de los vértices. Entonces se cumple:

A) $PQ+AC=AQ+PC$

B) $PQ+AC<AQ+PC$

C) $2(PQ)+AC>PC+AQ$

D) $PQ+AC>PC+AQ$

E) $PQ-AC>2(PC)-AQ$

PROBLEMA Nº 78 (1° P.C. 2007-I)

En un triángulo escaleno ABC la bisectriz del ángulo BAC y la bisectriz del ángulo exterior en C se intersecan en E. La bisectriz del ángulo AEC interseca a $\overline{AC}$ en D y a la bisectriz del ángulo ABC en F. Si m∢EDC = θ halle m∢BFE:

A) $90°-\frac{\theta}{2}$ B) $45°-\theta$ C) 3θ

D) $\frac{\theta}{2}$ E) θ

PROBLEMA Nº 79

(1er. EXÁMEN PARCIAL 2001-I)

Los lados de un triángulo miden:

$$8u\ ;\ (5+\sqrt{16-x})u\ \text{ y }\ (5-\sqrt{16-x})$$

La suma de todos los valores enteros posibles que puede tomar **x** es:

A) 150 B) 146 C) 140

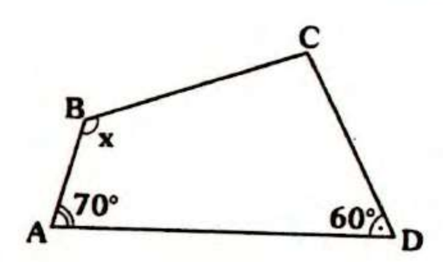
D) 136 E) 120

PROBLEMA Nº 80

(1er. EXÁMEN PARCIAL 2001-I)

En la figura, $AD = AB + BC$ y $BC = CD$, halle **x**.

A) 100°
B) 120°
C) 130°
D) 135°
E) 140°



PROBLEMA Nº 81

(1er. EXAMEN PARCIAL 2000-II)

Se tiene un triángulo isósceles ABC cuyo ángulo desigual ABC mide θ grados. Se trazan, la mediatriz de $\overline{AB}$ y la bisectriz del ángulo ACB, los cuales forman un ángulo agudo de **x** grados. Entonces la relación entre **x** y θ es:

A) $x = \frac{\theta}{4}$
B) $90° - \frac{\theta}{4}$
C) $x = 45° - \frac{\theta}{2}$
D) $x = 180° - 4\theta$
E) $x = 45° - \frac{3\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 82

(Texto CEPRE UNI - 2004)

En el interior de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica Q; $\overrightarrow{AQ} \cap \overline{BC} = \{E\}$; $\overrightarrow{CQ} \cap \overline{AB} = \{F\}$. Si $AQ + QC = 10u$ y $QE + QF = 4u$ ¿cuántos posibles valores enteros para la longitud de la hipotenusa existen?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

PROBLEMA Nº 83

(Texto CEPRE UNI- 2004)

En un triángulo isósceles ABC(AB = BC), se ubica el punto interior Q de modo que

$m\sphericalangle ABQ = m\sphericalangle QAC = 30°$;

$m\sphericalangle QBC = 10°$

Calcule $m\sphericalangle BQC$.

A) 120°
B) 135°
C) 150°
D) 100°
E) 90°

PROBLEMA Nº 84

(Texto CEPRE UNI - 2004)

En un triángulo ABC, $m\sphericalangle ACB = 30°$; $m\sphericalangle ABC = 105°$, sea M punto medio de $\overline{BC}$. Calcule $m\sphericalangle MAC$.

A) 15°
B) 20°
C) 30°
D) 45°/2
E) 18°

PROBLEMA Nº 85

(Texto CEPRE UNI-2004)

En un triángulo acutángulo ABC, la bisectriz del ángulo ABC y la bisectriz exterior del ángulo C se intersecan en F; las bisectrices de los ángulos BAC y BFC, se intersecan en R y al lado $\overline{BC}$ en P y Q respectivamente, entonces el triángulo PQR es:

A) Isósceles
B) Equilátero
C) Rectángulo
D) No está definido
E) Escaleno

PROBLEMA Nº 86

(Texto CEPRE - UNI 2004)

Dado un triángulo ABC(AB = BC), se ubican P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente de modo que PQR es un trián-

...gulo equilátero. Si $m\measuredangle BPQ = \alpha$ y $m\measuredangle RQC = \beta$. Calcule $m\measuredangle PRA$.

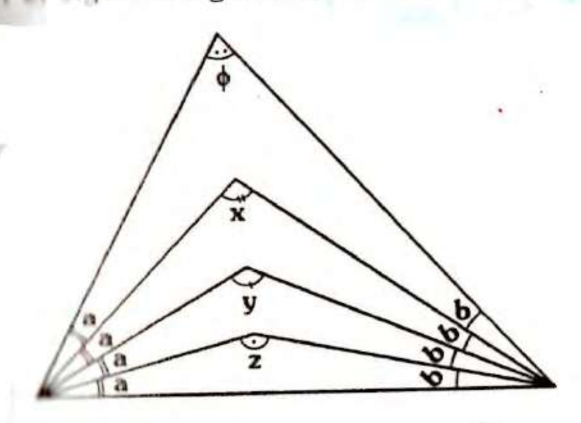
A) $\alpha - \beta$ B) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

C) $\alpha + \beta$ D) $45° - \dfrac{(\alpha+\beta)}{2}$

E) $90° - \dfrac{(\alpha+\beta)}{2}$

PROBLEMA Nº 87 (1er SEMINARIO 99-I)

En el siguiente gráfico, calcule $x + y + z$.



A) $270° + \dfrac{3}{2}\phi$ B) $270° + \dfrac{3}{4}\phi$

C) $135° + \dfrac{3}{2}\phi$ D) $135° + \dfrac{3}{4}\phi$

E) $360° - \dfrac{3}{4}\phi$

PROBLEMA Nº 88 (1er SEMINARIO 99-I)

En un triángulo ABC se ubica el punto interior O, si OA=x; OB=2x y OC=3x. Además AB=5u; BC=6u y AC=7u. Calcule entre que valores varía **x**.

A) $1{,}75 < x < 2{,}16$ B) $1{,}75 < x < 2{,}4$

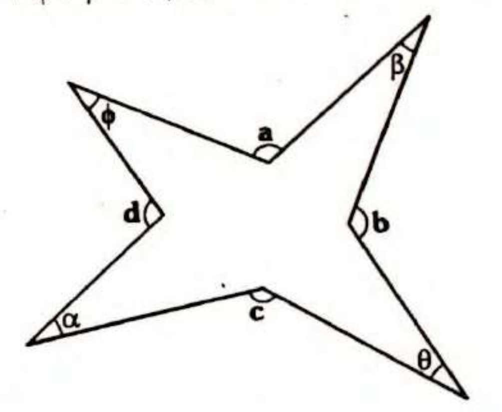
C) $\dfrac{5}{3} < x < 2{,}4$ D) $1 < x < 2$

E) $1{,}75 < x < 2$

PROBLEMA Nº 89 (1er SEMINARIO 99-I)

En el siguiente gráfico, calcule:

$\alpha + \phi + \beta + \theta$; si $a + b + c + d = 518°$



A) 154° B) 156° C) 157°

D) 158° E) 159°

PROBLEMA Nº 90 (1er SEMINARIO 99-I)

En un triángulo ABC (obtuso en B), $D \in \overline{AC}$, $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{BC}$, $m\measuredangle ADE = a + b$; $m\measuredangle EDF = a - b$; $m\measuredangle FDC = 3b - a$.

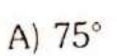
Si $m\measuredangle BAC = 8°$, $m\measuredangle BED = m\measuredangle BFD$ y b toma su mayor valor entero. ¿Cuánto mide el ángulo ABC?

A) 138° B) 156° C) 148°

D) 162° E) 152°

PROBLEMA Nº 91 (1er SEMINARIO 98-I)

En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, AB=BC y EC=EF, calcule $\alpha + \phi$.



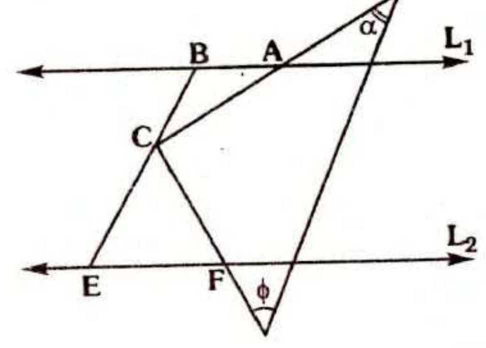
A) 75°

B) 90°

C) 120°

D) 110°

E) 105°



PROBLEMA Nº 107 (1er SEMINARIO 99-II)

En un triángulo ABC las bisectrices interiores se intersecan en I, por I se traza una perpendicular a $\overline{CI}$ la cual interseca a la bisectriz exterior del triángulo ABC, trazada desde A en Q. La bisectriz exterior del triángulo AIQ, trazada desde Q interseca a la prolongación de $\overline{IC}$ en el punto P.

Si $2(m\sphericalangle IPQ) = m\sphericalangle ABC$. Calcule $m\sphericalangle IPQ$.

A) 60° B) 54° C) 45°
D) 36° E) 30°

PROBLEMA Nº 108 (1er SEMINARIO 99-II)

La raíces de la ecuación :

$$x^3 - 7x^2 + 12x - nx^2 + 7nx - 12n = 0$$

son las medidas de los lados de un triángulo. Halle la suma de todos los valores enteros posibles de **n**.

A) 18 B) 20 C) 15
D) 22 E) 23

PROBLEMA Nº 109 (1er SEMINARIO 2007-II)

Dado un triángulo, sus ángulos interiores miden:

$$(3x + 2y),\ (3x - 2y)\ \text{ y }\ (4y - 3x)$$

¿Cuál es el menor valor entero múltiplo de tres que puede tomar y?

A) 21° B) 24° C) 27°
D) 30° E)33°

PROBLEMA Nº 110 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC isósceles, se cumple $m\sphericalangle ABC = 100°$, se trazan las cevia-nas interiores BP y CQ, tal que:

$$m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle BCQ = 30°$$

Calcule $m\sphericalangle CQP$.

A) 20° B) 40° C) 30°
D) 50° E) 36°

PROBLEMA Nº 111 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN, las prolongaciones de las cevianas interiores trazadas desde M y N en los triángulos AMC y ANC respectivamente, se cortan en Q, tal que:

$$m\sphericalangle MCN = 2(m\sphericalangle MAC) \ ;$$
$$m\sphericalangle NAM = 2(m\sphericalangle ACN) \ ;$$
$$m\sphericalangle ANQ = 3(m\sphericalangle AMQ) \ ; \ y$$
$$m\sphericalangle QMC = 3(m\sphericalangle QNC)$$

Calcule $m\sphericalangle MQN$

A) 90° B) 100° C) 105°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA Nº 112 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo PQR, se traza la bisectriz interior RT, se ubica M en $\overline{QR}$, por M se traza una recta perpendicular a la bisectriz, la recta interseca a $\overline{RP}$ en el punto F. Si $m\sphericalangle QPR + m\sphericalangle RQP = \theta$. Calcule $m\sphericalangle RMF$.

A) θ B) $\frac{\theta}{2}$ C) 2θ
D) $\frac{2\theta}{3}$ E) $\frac{3\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 113 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC se cumple:

$$m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle ACB = 100°$$

Calcule la medida del ángulo agudo que determinan la altura trazada desde B y la

bisectriz exterior trazada de A.

A) 50° B) 48° C) 40°
D) 60° E) 55°

PROBLEMA Nº 114 (1er SEMINARIO 2005-II)

En el lado BC de un triángulo ABC se ubica D, tal que CD=L y

$$2(m\sphericalangle CDA) = m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle ABC$$

Calcule AC.

A) L B) $\frac{L}{2}$ C) $\frac{L}{3}$
D) $\frac{2}{3}L$ E) $\frac{3}{4}L$

PROBLEMA Nº 115 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC (recto en B) se traza la altura BH. Las bisectrices de los ángulos ABH y HBC cortan a $\overline{AC}$ en M y N respectivamente.

Si $AB + BC - AC = K$. Calcule MN.

A) K B) $\frac{2}{3}K$ C) $\frac{3}{4}K$
D) $\frac{K}{2}$ E) $\frac{3}{5}K$

PROBLEMA Nº 116 (1er SEMINARIO 2005-II)

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BD y CE, luego se trazan los rayos DP y EP tal que:

$$m\sphericalangle BEP = 2(m\sphericalangle PEC) \;;$$
$$m\sphericalangle CDP = 2(m\sphericalangle PDB) \text{ y}$$
$$m\sphericalangle BAC = \omega$$

Calcule $m\sphericalangle EPD$

A) $\omega/2$ B) $60° - \omega$ C) 45°
D) 60° E) $180° - 2\omega$

PROBLEMA Nº 117 (1er SEMINARIO 2005-II)

En un triángulo ABC, en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica Q, a partir del cual se traza el rayo secante a $\overline{BC}$ en E y a $\overline{AB}$ en D.

Si $m\sphericalangle BCQ = 134°$ y $AQ = AB = QD$.

Calcule el valor entero de $m\sphericalangle ABC$.

A) 39° B) 41° C) 43°
D) 45° E) 46°

PROBLEMA Nº 118

(1er SEMINARIO 2005-II/ texto CEPRE UNI 2004

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. En un triángulo ABC se cumple que $AB > AC$, las bisectrices interiores de los ángulos B y C, se intersecan en I, entonces $IB > IC$.

II. M es un punto de $\overline{BC}$, entonces $AM < p$; siendo p el semiperímetro del triángulo.

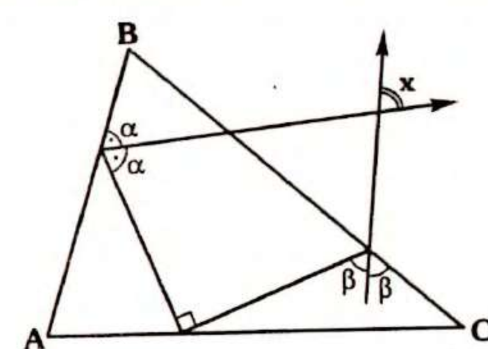
III. Todo triángulo isósceles también es acutángulo.

A) VVF B) VVV C) FVF
D) VFV E) FVV

PROBLEMA Nº 119 (1er SEMINARIO 2006-I)

En el gráfico, $m\sphericalangle ABC = 40°$, calcule **x**.

A) 40°
B) 45°
C) 50°
D) 60°
E) 65°



PROBLEMA Nº 120 (1er SEMINARIO 200-I)

Se tienen los triángulos ABC y AMN, donde $M \in \overline{AC}$ y $B \in \overline{AN}$, además:

$$m\measuredangle MBC = m\measuredangle NBC \quad ;$$

$$m\measuredangle BMN = m\measuredangle NMC$$

Si $m\measuredangle BAC = \phi$. Halle la medida del ángulo entre las bisectrices interiores de los ángulos en N y C.

A) $90° + \frac{\phi}{4}$ B) $135° - \frac{\phi}{4}$

C) $45° + \frac{\phi}{4}$ D) $90° + \frac{\phi}{4}$

E) $45° - \frac{\phi}{4}$

PROBLEMA Nº 121 (1er SEMINARIO 2006-I)

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior desde A y la bisectriz exterior desde C, las cuales se cortan en E, las bisectrices de los ángulos ABC y AEC se intersecan en Q e intersecan a $\overline{AC}$ en M y N. Si $MN = 8\,cm$. Calcule MQ (en cm)

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº 122 (1er SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo se trazan las cevianas interiores BE y AD de manera que AB=AE=BD, DE=DC y $m\measuredangle BAE = 60°$. Calcule $m\measuredangle EDC$.

A) 80° B) 90° C) 100°
D) 120° E) 145°

PROBLEMA Nº 123 (1er SEMINARIO 2006-II

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BE y CD, F es un punto interior del triángulo ABC tal que

$$m\measuredangle BDF = 4(m\measuredangle FDC) \quad ;$$

$$m\measuredangle FEC = 4(m\measuredangle BEF) \quad ;$$

$$m\measuredangle BDC = 5(m\measuredangle CDF) \text{ y}$$

$$m\measuredangle DAE + m\measuredangle DFE = 180°$$

Calcule $m\measuredangle BAC$

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 100° E) 101°

PROBLEMA Nº 124 (1er SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo ABC, la bisectriz interior del ángulo A y exterior del ángulo C se intersecan en E. Por el punto E se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que interseca a los lados BC y BA en P y Q respectivamente. Si $AQ - CP = \ell$, entonces la longitud de $\overline{PQ}$ es:

A) ℓ B) $\frac{\ell}{2}$ C) $\frac{2}{3}\ell$

D) $\frac{\ell}{3}$ E) $\frac{3}{4}\ell$

PROBLEMA Nº 125 (1er SEMINARIO 2006-II)

En un triángulo ABC (recto en B), AB=BC, se ubica P interior al triángulo, tal que $3(m\measuredangle BAP) = 2(m\measuredangle PBC) = 6(m\measuredangle PCA)$.

Entonces $m\measuredangle APC$ es:

A) 120° B) 105° C) 136°
D) 144° E) 150°

PROBLEMA Nº 126 (1er SEMINARIO 2006-II)

Los lados AB, BC y AC de un triángulo miden 8; 10 y 12 u respectivamente. Se ubica F en la región interior tal que $AF = \frac{BF}{2} = \frac{CF}{3}$. ¿Entre que valores se en-

cuenta el perímetro del triángulo AFC?

A) Entre 24 y 26 B) Entre 24 y 28
C) Entre 26 y 28 D) Entre 25 y 29
E) Entre 24 y 27

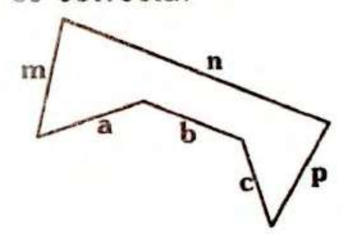
PROBLEMA Nº 127 (1er SEMINARIO 2006-II)

Sean los triángulos rectángulos ABC y AEC, cuya hipotenusa común es $\overline{AC}$ y cuyos catetos de mayor longitud son $\overline{AB}$ y $\overline{CE}$ los cuales se intersecan en Q. Si $AB + CE = 12$ y $AE + BC = 6$, entonces la suma de los valores enteros de la longitud de AC es:

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

PROBLEMA Nº 128 (SEMINARIO 2007-I)

Si $n - b = k$ ¿cuál de las siguientes expresiones es correcta?



I. $\dfrac{a+c}{2} < m + p - k$

II. $a + c + k < m + p$

III. $a + c < m + p + k$

IV. $a + c < \dfrac{m+p}{2} - k$

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) Sólo IV E) I y III

PROBLEMA Nº 129 (1er SEMINARIO 2007-II)

En un triángulo ABC se tiene que el ángulo ABC mide 100°. En el exterior del triángulo ABC y en el interior del ángulo ABC se ubica el punto P. Si $PA = AB$; $m\sphericalangle BAP = 60°$ y $m\sphericalangle APC = 160°$. Calcule $m\sphericalangle PAC$.

A) 10° B) 12° C) 8°
D) 15° E) 16°

PROBLEMA Nº 130 (1er SEMINARIO 2007-I)

En el triángulo MNP se cumple: $m\sphericalangle MNP = 21°$ y $PM > NP$. Entonces el mínimo valor entero para la medida del ángulo NPM es:

A) 159° B) 119° C) 149°
D) 129° E) 139°

PROBLEMA Nº 131 (1er SEMINARIO 2007-I)

Dado un triángulo ABC tal que $AB < AC$, se toma sobre $\overline{AC}$ el punto D, tal que AD=AB y resulta que D equidista de B y C. Halle $m\sphericalangle B$ en función de $m\sphericalangle C$.

A) $m\sphericalangle C$ B) $2(m\sphericalangle C)$ C) $3(m\sphericalangle C)$
D) $\dfrac{3}{2}(m\sphericalangle C)$ E) $\dfrac{1}{2}(m\sphericalangle C)$

PROBLEMA Nº 132 (1er SEMINARIO 2007-I)

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices exteriores desde los vértices A y B, que se intersecan con las prolongaciones de las bisectrices interiores de los vértices B y A respectivamente en los puntos P y Q.

Si $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle BCA) = \alpha$, entonces la medida del ángulo agudo que determinan las rectas AQ y BP es:

A) $90° - \dfrac{\alpha}{3}$ B) $90° - \dfrac{\alpha}{2}$ C) $90° - \dfrac{2}{3}\alpha$
D) $90° - \dfrac{\alpha}{4}$ E) $90° - \dfrac{3}{4}\alpha$

PROBLEMA Nº 133 (1er SEMINARIO 2007-I)

En un triángulo ABC se ubica un punto interior P, tal que la suma de $(PA + PB + PC)$ es un número entero. Calcule dicha suma en m si $AB = 1{,}2\,m$; $BC = 1{,}6\,m$ y $AC = 1{,}5\,m$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 134 (1er SEMINARIO 2007-I)

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BD. Si $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BCA)$; $BC = 8u$ y $AD = 3u$, entonces la longitud de $\overline{AB}$ (en u) es:

A) 2 B) 1 C) 5
D) 3 E) 6

PROBLEMA Nº 135 (1er SEMINARIO 2007-II)

En un triángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH. La bisectriz del ángulo BAC interseca a la altura BH en M y al cateto BC en P. Entonces el triángulo MBP es:

A) Equilátero B) Obtuso C) Isósceles
D) Escaleno E) Rectángulo

PROBLEMA Nº 136 (1er SEMINARIO 2007-II)

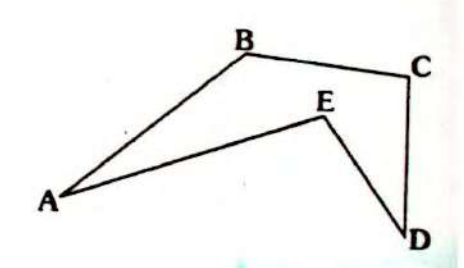
En un triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$, se traza la bisectriz interior AD. Si $AD = 16u$, entonces la menor longitud entera del segmento CD es:

A) 7u B) 8u C) 9u
D) 10u E) 11u

PROBLEMA Nº 137 (1er SEMINARIO 2006-II)

En el gráfico demostrar:

$$AE + ED < AB + BC + CD$$



PROBLEMA Nº 138 (1er SEMINARIO 200-I)

En un triángulo ABC, las bisectrices: interior de A y exterior de C, se intersecan en E; las bisectrices de los ángulos ABC y AEC, se intersecan en Q y determinan los puntos F y J en $\overline{AC}$. Demostrar que el triángulo FQJ es isósceles.

PROBLEMA Nº 139 (SEMINARIO 2007-II)

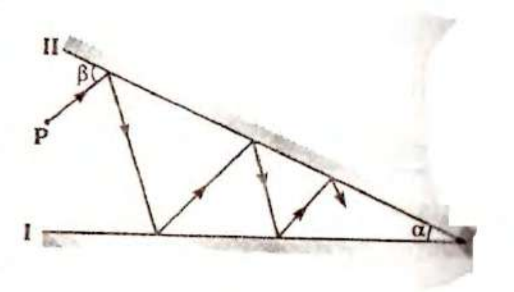
En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior BD. Si $m\sphericalangle BAC > m\sphericalangle BCA$. Demostrar :

$$m\sphericalangle BDC - m\sphericalangle BDA = m\sphericalangle BAC - m\sphericalangle BCA$$

PROBLEMA Nº 140 (1er SEMINARIO 2007-II)

En la figura se muestran dos espejos planos I y II que forman un ángulo que mide α . Desde el punto P sale un rayo de luz que incide sobre el espejo II bajo un ángulo que mide β . Calcule la medida del ángulo de incidencia del rayo de luz sobre el espejo I cuando incide por tercera vez sobre este espejo. Considere que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

A) $6\alpha - \beta$
B) $4\alpha - \beta$
C) $3\alpha + \beta$
D) $6\alpha + \beta$
E) $5\alpha + \beta$



Problemas Resueltos

Ciclo Semestral

PROBLEMA Nº 141

Dado el triángulo equilátero ABC y P un punto en la región interior. Si AP=2 y PC=7, calcule el mayor valor entero de PB.

A) 11 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

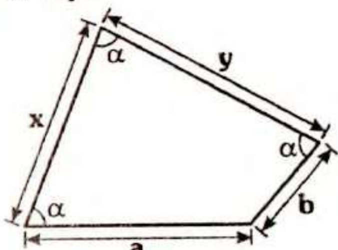
PROBLEMA Nº 142

En un triángulo rectángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AP y CQ que cortan a la altura BH en M y N respectivamente. Si BP=a y BQ=b, $(a>b)$ calcule MN.

A) $\frac{a+2}{2}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $a-b$
D) $a-\frac{b}{2}$ E) $\frac{a-b}{2}$

PROBLEMA Nº 143

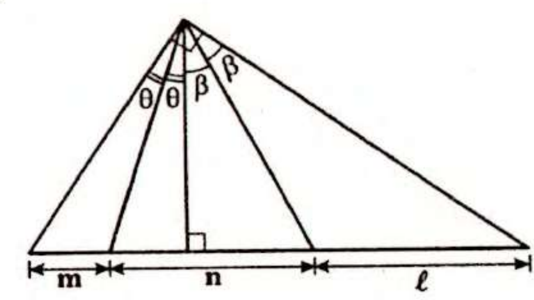
En el gráfico, $\alpha<90°$, indica entre que valores esta **xy**.



A) $\langle ab;(a+b)^2\rangle$ B) $\left\langle 2ab;\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\rangle$
C) $\langle ab;(a^2+b)^2\rangle$ D) $\left\langle \frac{ab}{2};2(a+b)^2\right\rangle$
E) $\left\langle \frac{ab}{4};2(a+b)^2\right\rangle$

PROBLEMA Nº 144

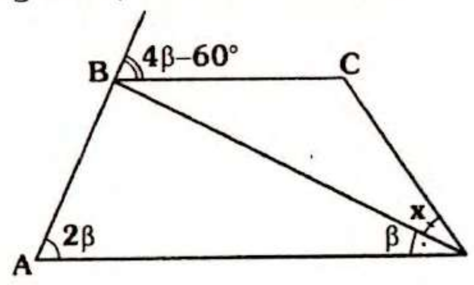
En el gráfico, indique la relación correcta:



A) $\ell=m+n$ B) $n^2=m\ell$
C) $n^2=2m\ell$ D) $\ell^2=m^2+n^2$
E) $\ell=\sqrt{mn}$

PROBLEMA Nº 145

En el gráfico, AB=BC calcule **x**.



A) 30° B) $\frac{45°}{2}$ C) 15°
D) $30°+\beta$ E) $30°-\beta$

PROBLEMA Nº 146

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior BD, tal que: $2(m\measuredangle DBC)=3(m\measuredangle BAC)$ y $AB=DC+BC$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 18° B) 30° C) 36°
D) 15° E) 32°

PROBLEMA Nº 147

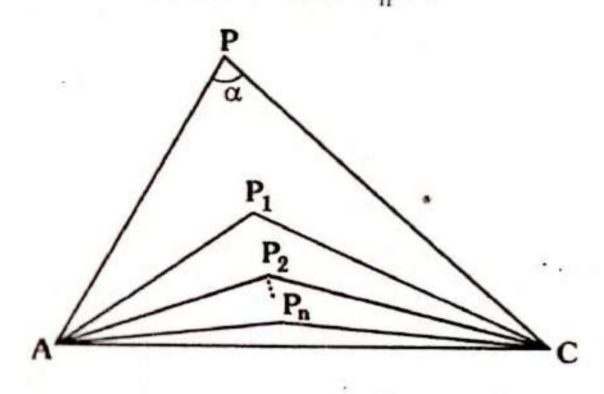
En un triángulo ABC, se ubica P en $\overline{AB}$ y Q en la prolongación de $\overline{AC}$. Si las bisectrices exteriores trazadas desde B y Q, en los triángulos ABC y APQ respectivamente se cortan en T; $\overline{PQ}\cap\overline{BC}=\{R\}$ y $m\measuredangle BAC - m\measuredangle PRB = 20°$.

Calcule $m\measuredangle BTQ$.

A) 10° B) 40° C) 80°
D) 20° E) 70°

PROBLEMA Nº 148

En el gráfico, en el triángulo APC, $\overline{AP_1}$ y $\overline{CP_1}$ son bisectrices trazadas de A y C; en el triángulo AP_1C, $\overline{AP_2}$ y $\overline{CP_2}$ son bisectrices trazadas de A y C y asi sucesivamente. Calcule $m\measuredangle AP_nC$.



A) $90° - \frac{1}{2^n}\alpha$ B) $90°\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2^n}\alpha$

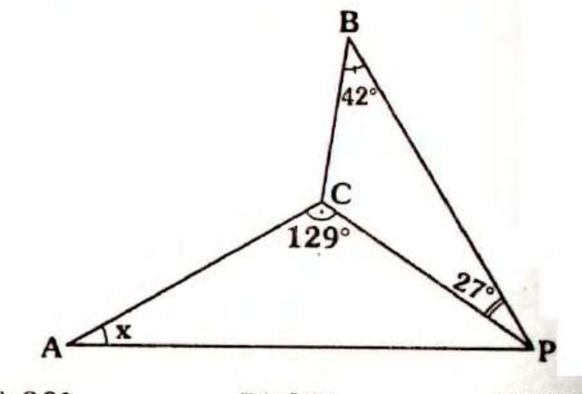
C) $180°\left(1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\alpha$

D) $180°\left[1-\frac{1}{2^n}\right]+\frac{1}{2^n}\alpha$

E) $90°\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{\alpha}{n}$

PROBLEMA Nº 149

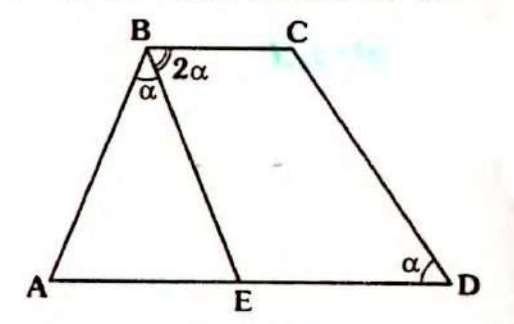
En el gráfico, BP=AC, calcule **x**.



A) 30° B) 21° C) 27°
D) 32° E) 42°

PROBLEMA Nº 150

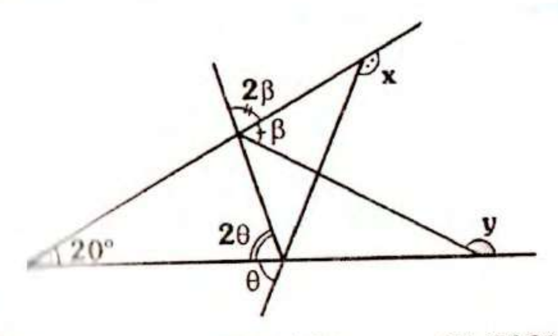
En el gráfico, $\overline{BC}\parallel\overline{AD}$ y $AB=ED$, calcule el menor valor entero de α.



A) 35° B) 36° C) 37
D) 44° E) 41°

PROBLEMA Nº 151

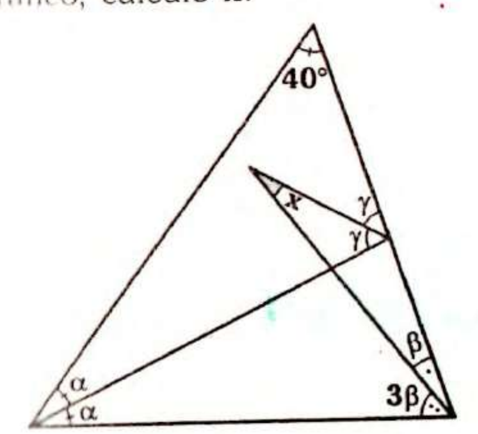
Del gráfico, calcule $x+y$.



A) 320° B) 160° C) 200°
D) 180° E) 220°

PROBLEMA Nº 152

Del gráfico, calcule **x**.



A) 10° B) 30° C) 20°
D) 35° E) 25°

PROBLEMA Nº 153

En el gráfico, $AD = DB = DE$. Calcule $\frac{a}{b}$

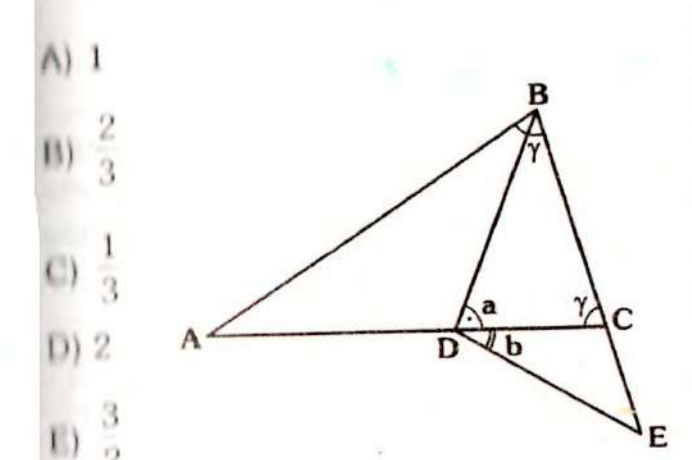
A) 1

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{3}$

D) 2

E) $\frac{3}{2}$



PROBLEMA Nº 154

En un triángulo un lado mide 10, calcule el menor valor entero del perímetro de la región triangular.

A) 11 B) 12 C) 20
D) 19 E) 21

PROBLEMA Nº 155

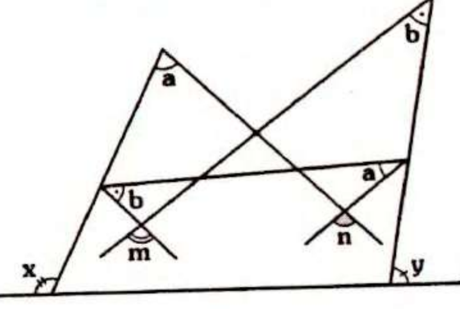
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior CE y en $\overline{AC}$ se ubica D. Si $m\sphericalangle ABC = 100°$, $m\sphericalangle BAC = 20°$, $AE = EC$ y $EB = CD$. Calcule $m\sphericalangle AED$

A) 100° B) 105° C) 120°
D) 115° E) 110°

PROBLEMA Nº 156

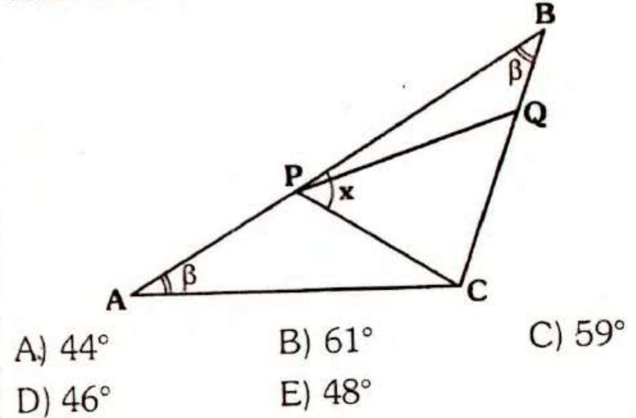
En el gráfico, $x + y = 220°$. Calcule $m + n$

A) 120°
B) 180°
C) 140°
D) 150°
E) 160°



PROBLEMA Nº 157

En el gráfico, $PB = QC$. Calcule el menor valor entero de **x**.



A) 44° B) 61° C) 59°
D) 46° E) 48°

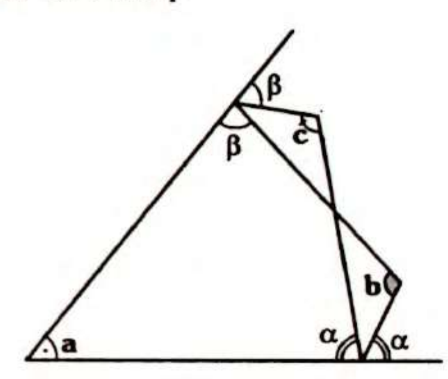
PROBLEMA Nº 158

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BP}$, se ubica Q en $\overline{BC}$, tal que AP = BQ. Calcule el menor valor entero de m∢BQA, si m∢ABC = 40°.

A) 61° B) 71° C) 69°
D) 59° E) 89°

PROBLEMA Nº 159

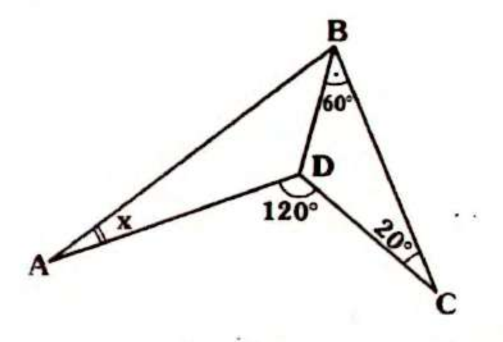
En el gráfico, se cumple :
$ma + nb + pc = 360°$; donde m, n y $p \in \mathbb{Z}^+$
Calcule $m + n + p$



A) 5 B) 4 C) 3
D) 6 E) 2

PROBLEMA Nº 160

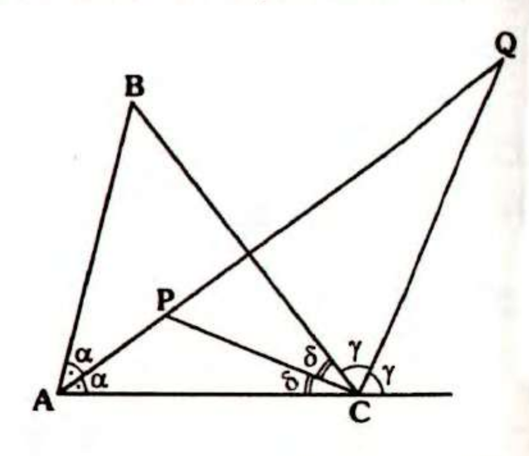
En el gráfico, AD=BC.
Calcule **x**.



A) 8° B) 10° C) 12°
D) 18° E) 15°

PROBLEMA Nº 161

En el gráfico, el triángulo ABC es acutángulo y CQ = 7. Calcule PQ, cuando PC toma su mayor valor entero.



A) $\sqrt{85}$ B) $\sqrt{75}$ C) 10
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 162

En el triángulo obtusángulo ABC (obtuso en B) se traza la ceviana interior BM tal que el triángulo AMB es obtuso en M. Si AB + AC = 10. Calcule el mayor valor entero de AZ ($\overline{AZ}$ es ceviana interior del triángulo AMB).

A) 3 B) 4 C) 5
D) 2 E) 6

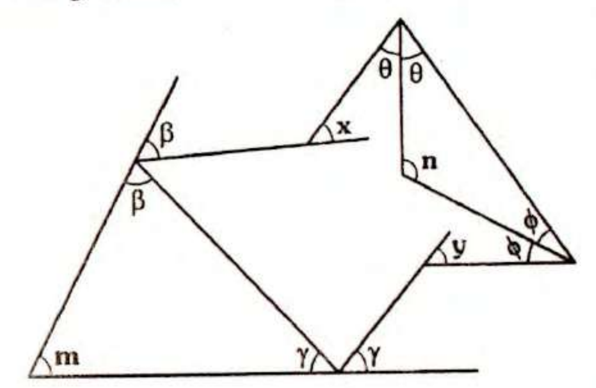
PROBLEMA Nº 163

El perímetro de una región triangular es k ($k \in \mathbb{Z}^+$). Calcule el mayor valor entero del perímetro de la región triangular cuyos vértices están en los lados del triángulo inicial.

A) k B) 2k − 3 C) k − 1
D) 2k E) k + 1

PROBLEMA Nº 164

En el gráfico, $n - m = 60°$, calcule $x + y$.



A) 80° B) 140° C) 120°
D) 100° E) 130°

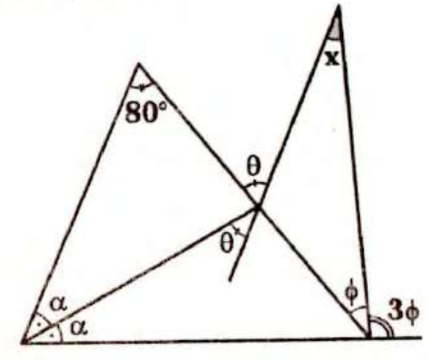
PROBLEMA Nº 165

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BM}$ y en el triángulo BMC se traza la ceviana interior MN tal que $AB = BM = MN = NC$. Si $m\sphericalangle ACB$ es máximo entero, calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 66° B) 58° C) 61°
D) 62° E) 87°

PROBLEMA Nº 166

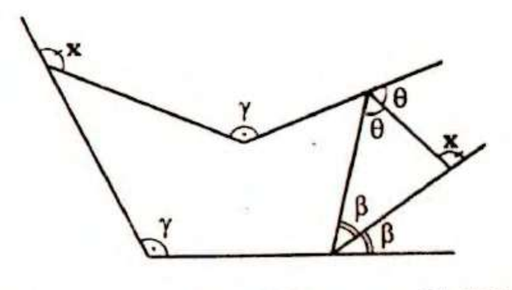
Del gráfico, calcule **x**.



A) 40° B) 50° C) 30°
D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 167

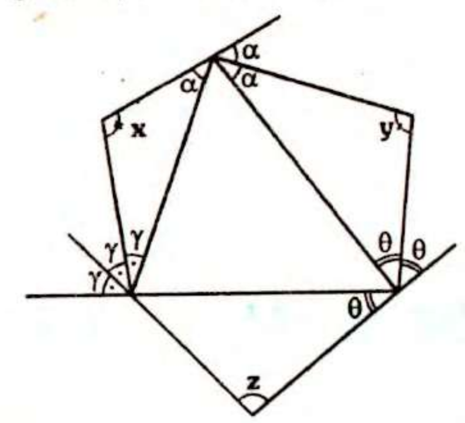
Del gráfico, calcule **x**.



A) 90° B) 120° C) 135°
D) 100° E) 108°

PROBLEMA Nº 168

En el gráfico, calcule $x + y + z$

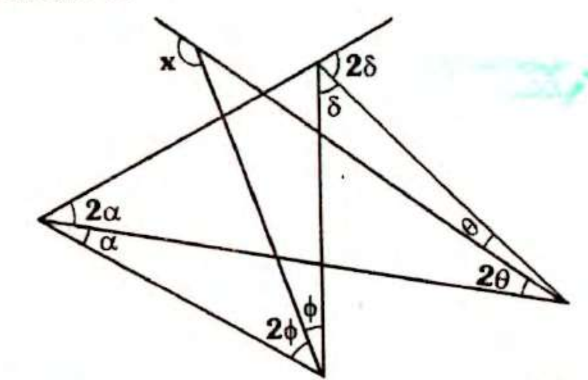


A) 300° B) 240° C) 270°
D) 320° E) 450°

PROBLEMA Nº 169

En el gráfico, $\alpha + \theta = 25°$

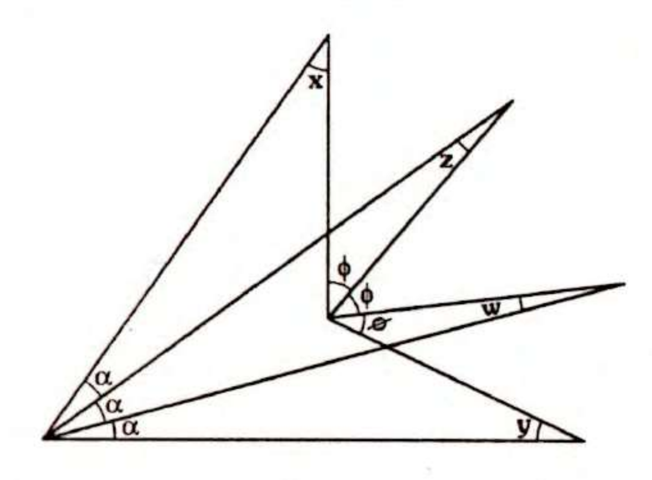
Calcule **x**.



A) 165° B) 175° C) 145°
D) 155° E) 140°

PROBLEMA Nº 170

Del gráfico, calcule $\frac{x+y}{z+w}$



A) 1 B) 3 C) 2

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

PROBLEMA Nº 171

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BF, tal que AB=4;

$m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle ACB)$,

$m\measuredangle FBC = 3(m\measuredangle ACB)$

Calcule el valor entero de BF.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 5 E) 4

PROBLEMA Nº 172

En una región triangular isósceles se cumple que el perímetro es mayor que el triple de su base. Calcule el mayor valor entero de la medida del menor ángulo interior.

A) 44° B) 59° C) 89°

D) 61° E) 58°

PROBLEMA Nº 173

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y BN, las cuales se cortan en L. Si AM=MC, AB=BN y $m\measuredangle MLN = 2(m\measuredangle ABC)$.

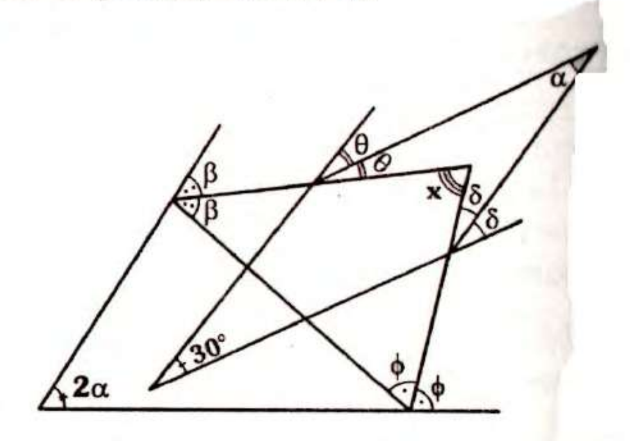
Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 60° C) 45°

D) 36° E) 72°

PROBLEMA Nº 174

En el gráfico, calcule **x**.



A) 45° B) 60° C) 80°

D) 70° E) 50°

PROBLEMA Nº 175

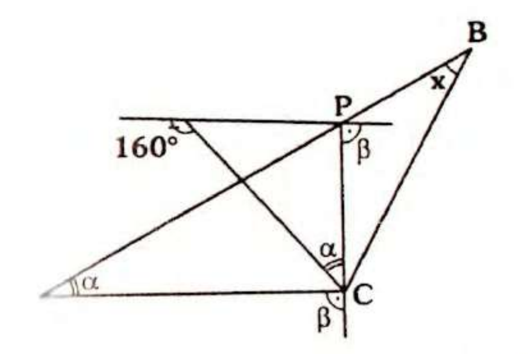
En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), la altura BH y la ceviana interior CD se cortan en Q. Si AD=DC calcule el mayor valor entero de $m\measuredangle BQC$.

A) 91° B) 136° C) 121°

D) 134° E) 119°

PROBLEMA Nº 176

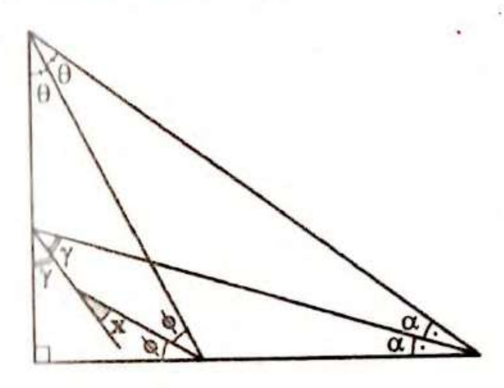
En el gráfico, PB=PC, calcule **x**.



A) 40° B) 50° C) 30°
D) 10° E) 20°

PROBLEMA Nº 177

Del gráfico, calcule **x**.



A) 15° B) 30° C) 45°
D) 45°/2 E) 53°/2

PROBLEMA Nº 178

En el triángulo isósceles ABC de base AC, se traza la ceviana interior CD y la bisectriz exterior $\overline{DE}$ del triángulo ADC. Si m∢DEC = 19°. Calcule m∢DCB

A) 38° B) 19° C) 79°
D) 61° E) 69°

PROBLEMA Nº 179

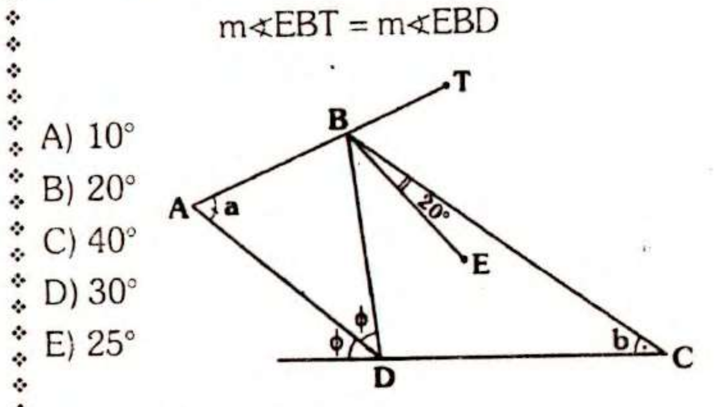
Se tiene un triángulo equilátero ABC, en $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubican P y Q respectivamente, de tal manera que el triángulo BPQ es isósceles de base BP, si $\overline{BQ} // \overline{PC}$ y BP=BR. Calcule m∢ABP ($\overline{PQ} \cap \overline{BC} = \{R\}$)

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 32° E) 36°

PROBLEMA Nº 180

En el gráfico, calcule a – b, si $\overline{BE} // \overline{AD}$ y m∢EBT = m∢EBD

A) 10°
B) 20°
C) 40°
D) 30°
E) 25°



PROBLEMA Nº 181

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AM, en cuya prolongación se ubica D. Si BD = DC y

$$3(m∢DAC) = 2(m∢BCA) = 6(m∢BCD) = 60°$$

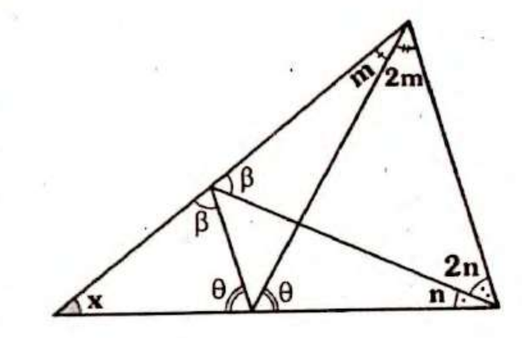
Calcule m∢BAD.

A) 45° B) 36° C) 30°
D) 20° E) 18°

PROBLEMA Nº 182

En el gráfico, calcule **x**.

A) 36°
B) 60°
C) 45°
D) 30°
E) 54°



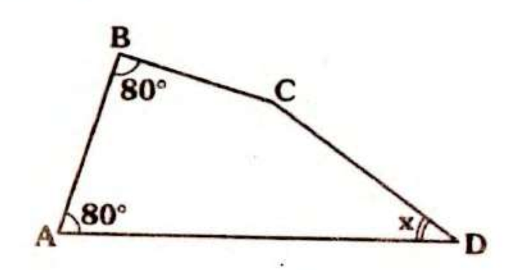
PROBLEMA Nº 183

En el triángulo ABC($m\sphericalangle ABC = 90°$) se traza la altura BH y en ella se ubica P. Si $AC + AB = 10$, calcule el mayor valor entero de AP.

A) 4 B) 3 C) 5
D) 9 E) 6

PROBLEMA Nº 184

En el gráfico, $AD > AB$ y $AB = BC = CD$. Calcule **x**.



A) 10° B) 20° C) 30°
D) 50° E) 40°

PROBLEMA Nº 185

En el triángulo ABC, se ubican en $\overline{AB}$ y en las regiones exteriores y relativas a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ los puntos P, Q y R respectivamente. Si $\overline{AC} \cap \overline{QR} = \{M\}$;

$m\sphericalangle BPQ = m\sphericalangle QMC$;

$m\sphericalangle RAC + m\sphericalangle BAR = 180°$ y

$m\sphericalangle MRA = 64°$

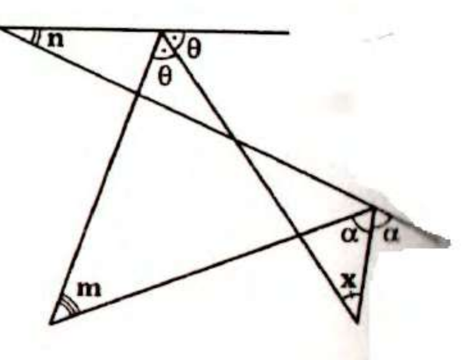
Calcule $m\sphericalangle PQR$.

A) 64° B) 56° C) 52°
D) 60° E) 32°

PROBLEMA Nº 186

En el gráfico, $m + n = 60°$. Calcule **x**.

A) 20°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) 50°



PROBLEMA Nº 187

En los lados AB, BC y AC del triángulo ABC se ubican los puntos P, Q y R respectivamente. Si AR=RP; CR=RQ y $m\sphericalangle PRQ = 80°$. Calcule la medida del ángulo entre las bisectrices de los ángulos APQ y PQC.

A) 56° B) 40° C) 64°
D) 65° E) 50°

PROBLEMA Nº 188

En el triángulo ABC se trazan la ceviana interior BP y la ceviana exterior BQ (Q en la prolongación de $\overline{CA}$).

Si $m\sphericalangle BCA = 2(m\sphericalangle BQA) = 20°$;

BC=AP+AB y QA=BC+AB

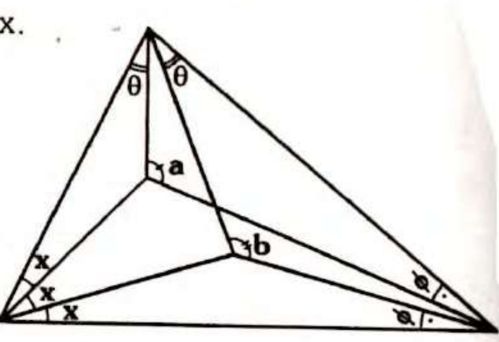
Calcule $m\sphericalangle CBP$.

A) 10° B) 40° C) 60°
D) 20° E) 30°

PROBLEMA Nº 189

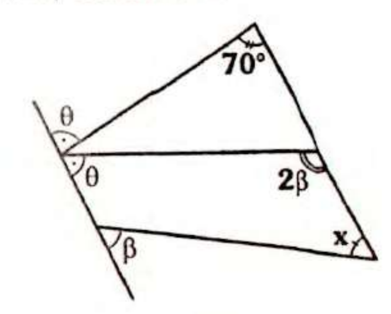
En el gráfico, $a + b = 210°$
Calcule x.

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 18°



PROBLEMA Nº 190

Del gráfico, calcule **x**.



A) 70° B) 35° C) 40°
D) 55° E) 65°

PROBLEMA Nº 191

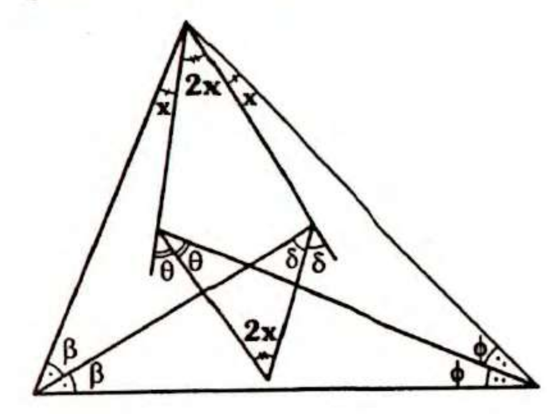
En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN de modo que m∢BNC = m∢AMC . Si la medida del menor ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos ANC y AMC es igual a la medida del ángulo ABC.

Calcule m∢CBA .

A) 36° B) 54° C) 60°
D) 45° E) 37°

PROBLEMA Nº 192

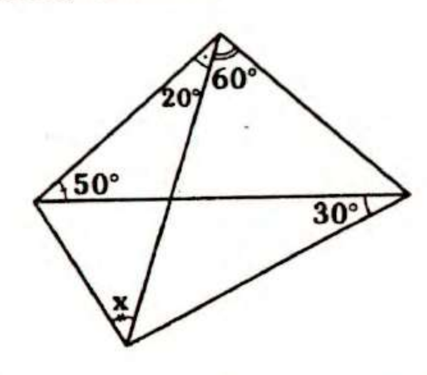
Del gráfico, calcule **x**.



A) 28° B) $\frac{45°}{2}$ C) 24°
D) 20° E) 10°

PROBLEMA Nº 193

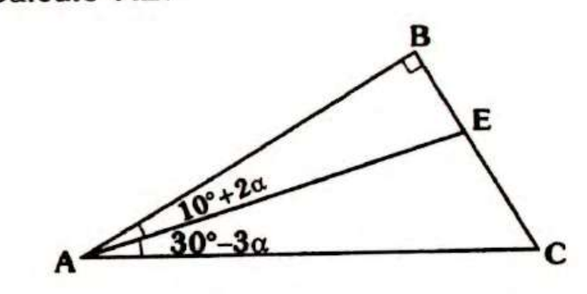
Del gráfico, calcule **x**.



A) 20° B) 40° C) 30°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA Nº 194

En el gráfico, BE=a y EC=b.
Calcule AE.

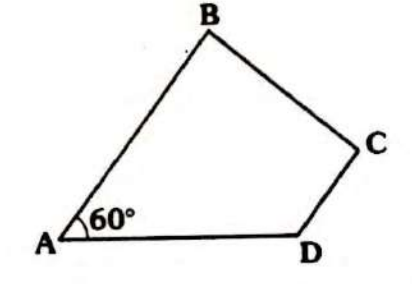


A) a + b B) 2a + b C) 2a − b
D) a + 2b E) 2b − a

PROBLEMA Nº 195

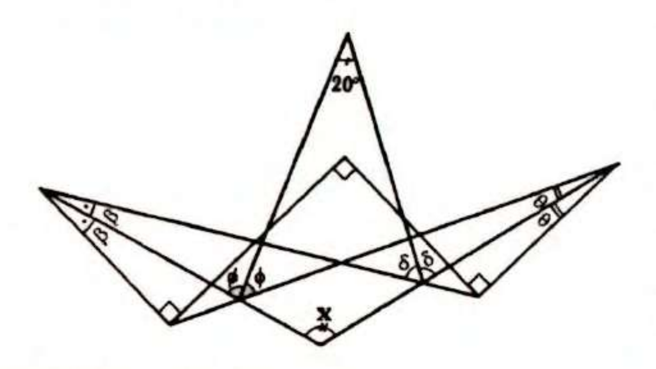
En el gráfico, AB = AD = 17 , CD = 8 y el ángulo BCD es obtuso. Indique la cantidad de valores enteros para BC.

A) 1
B) 5
C) 3
D) 0
E) 4



PROBLEMA Nº 196

Del gráfico, calcule **x**.

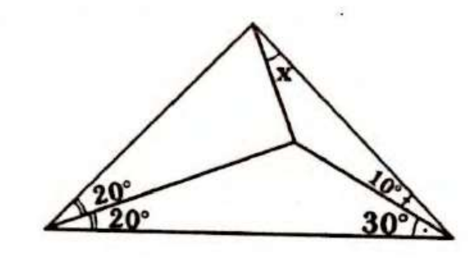


A) 160° B) 140° C) 130°

D) 155° E) 150°

PROBLEMA Nº 197

Del gráfico, calcule **x**.

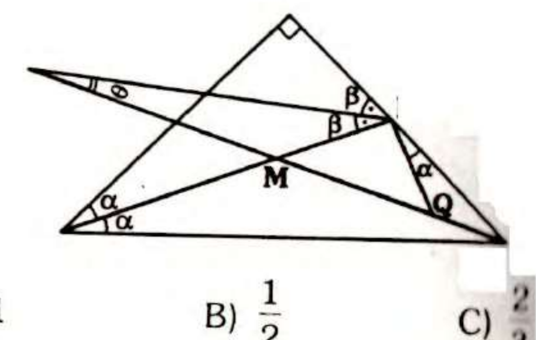


A) 5° B) 7,5° C) 10°

D) 20° E) 15°

PROBLEMA Nº 198

En el gráfico, $MP = PQ$. Calcule $\frac{\alpha}{\theta}$



A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$

D) 2 E) $\frac{1}{3}$

PROBLEMA Nº 199

En un triángulo ABC se ubica P en la región interior, tal que $AP = AB = PC$ y

$$\frac{m\sphericalangle PCB}{3} = \frac{m\sphericalangle PAC}{2} = \frac{m\sphericalangle ABC}{13}$$

Calcule $m\sphericalangle PAC$.

A) 10° B) 12° C) 20°

D) 18° E) 22,5°

PROBLEMA Nº 200

El perímetro de un triángulo rectángulo es 30. ¿Cuántos valores enteros puede tener la longitud de la hipotenusa?

A) 0 B) 3 C) 2

D) 4 E) 5

Problemas Resueltos

Ciclo Semestral Intensivo

PROBLEMA Nº 201

Se tiene un triángulo en el cual un lado mide 1 y la medida del mayor ángulo exterior es β. Si las longitudes de los lados son enteras calcule la medida del menor ángulo exterior.

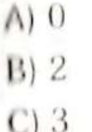
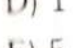
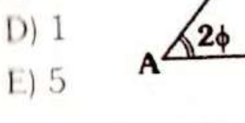
A) β B) $360° - 2\beta$

C) $90° - \beta$ D) $180° - \dfrac{\beta}{2}$

E) $180° - \beta$

PROBLEMA Nº 202

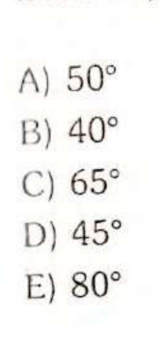
En el gráfico, PC=18, indique cuántos valores enteros puede tener AB.

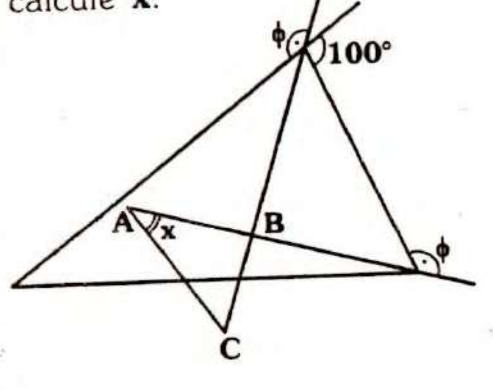
A) 0
B) 2
C) 3
D) 1
E) 5

PROBLEMA Nº 203

En el gráfico, el triángulo ABC es isósceles, calcule **x**.



A) 50°
B) 40°
C) 65°
D) 45°
E) 80°



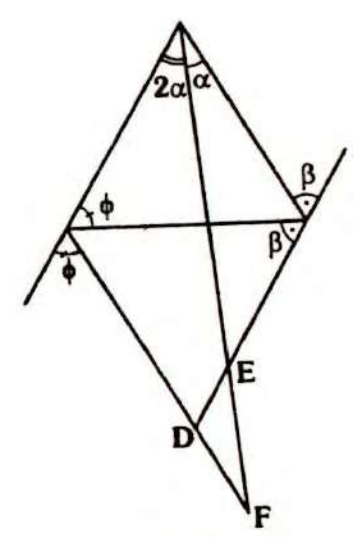
PROBLEMA Nº 204

¿Cuántos triángulos de longitudes enteras cuyo perímetro es 40u existen?

A) 30 B) 32 C) 33
D) 34 E) 35

PROBLEMA Nº 205

En el gráfico, ED=DF, calcule el mayor valor entero de α.



A) 44° B) 18° C) 31°
D) 17° E) 29°

PROBLEMA Nº 206

En el triángulo ABC, se ubican P y Q en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente tal que:

$$AB = BP = PQ = QC$$

Si $m\measuredangle ABC = 5(m\measuredangle QPC)$

Calcule $m\measuredangle QPC$.

A) 10° B) 18° C) 15°
D) 12° E) 20°

PROBLEMA Nº 207

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior BF tal que AC=16 y

$$m\measuredangle ABF = 90° - 3(m\measuredangle ACB)$$

Calcule el menor valor entero de BF.

A) 4 B) 6 C) 5
D) 7 E) 9

PROBLEMA Nº 208

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BD y CP secantes en R, tal que:

$$m\measuredangle PCB = 3(m\measuredangle PBD) \quad ,$$

$$m\measuredangle DBC = 3(m\measuredangle PCD) \ \text{y}$$

$$m\measuredangle DPR = m\measuredangle RDP = m\measuredangle BAC$$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 54° B) 72° C) 36°
D) $\frac{540°}{11}$ E) $\frac{540°}{13}$

PROBLEMA Nº 209

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM de modo que AM=BC.

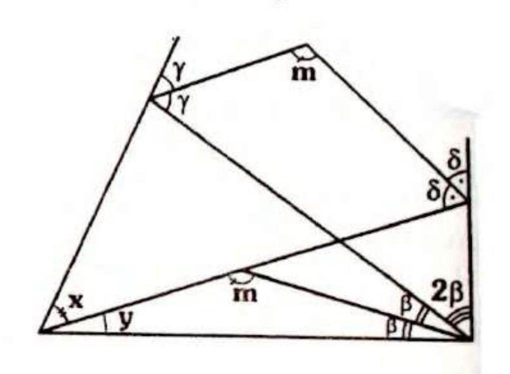
$$\text{Si}: \frac{m\measuredangle BAM}{3} = \frac{m\measuredangle BCM}{2} = 10°$$

Calcule $m\measuredangle CBM$.

A) 10° B) 15° C) 18°
D) 25° E) 20°

PROBLEMA Nº 210

En el gráfico, calcule $\frac{x}{y}$



A) 1 B) 2 C) 3
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

PROBLEMA Nº 211

En el triángulo ABC en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ se ubica D, Si BC=CD,

$$m\measuredangle BCA = 60° - \theta \quad \text{y}$$

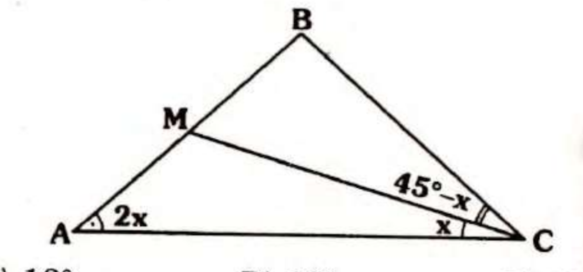
$$m\measuredangle ADC = 2(m\measuredangle CAD) = 2\theta$$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 15° B) 45° C) 30°
D) 37° E) 60°

PROBLEMA Nº 212

En el gráfico, AM=MB. Calcule **x**.



A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 213

Se tiene el triángulo ABC, se ubica P en la región exterior relativa a $\overline{AB}$, tal que BC = BP, $m\sphericalangle ACB = 54°$,

$m\sphericalangle ABC = 3(m\sphericalangle ABP) = 99°$

Calcule $m\sphericalangle APC$.

A) 93° B) 92° C) 90°
D) 91° E) 94°

PROBLEMA Nº 214

En el triángulo ABC se ubica P en la región interior. Si BC = PC = 15 y AP = 8. Calcule el menor valor entero de AC.

A) 16 B) 17 C) 18
D) 22 E) 23

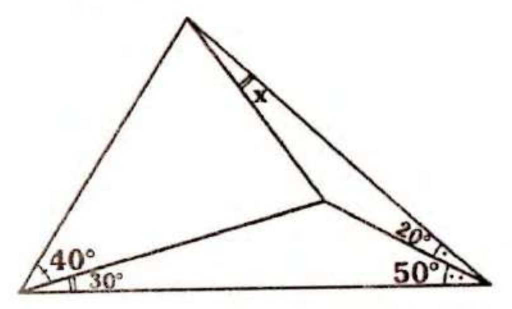
PROBLEMA Nº 215

En el triángulo ABC ($m\sphericalangle ABC = 90°$) se traza la altura BH y en ella se ubica P. Se ubica T en la región exterior relativa a $\overline{AC}$, tal que $m\sphericalangle ACT = 90°$. Si AP = 2 y AT = 6. Calcule el valor entero de BM, siendo M punto medio de $\overline{AC}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 216

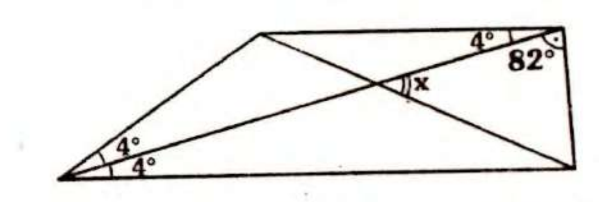
Del gráfico, calcule **x**.



A) 10° B) 12° C) 15°
D) 9° E) 18°

PROBLEMA Nº 217

En el gráfico, calcule **x**.



A) 8° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 9°

PROBLEMA Nº 218

En el triángulo rectángulo ABC (reto en B), se ubica Q en $\overline{AC}$ tal que $m\sphericalangle QBC = 3x$, $m\sphericalangle BAC = 2x$ y AB = CQ. Calcule **x**.

A) 15° B) 16° C) 18°
D) 22°30' E) 26°30'

PROBLEMA Nº 219

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM, tal que AB = CM y

$$\frac{m\sphericalangle BAM}{4} = \frac{m\sphericalangle BCM}{3} = 10°$$

Calcule $m\sphericalangle MBC$.

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 35° E) 55°

PROBLEMA Nº 220

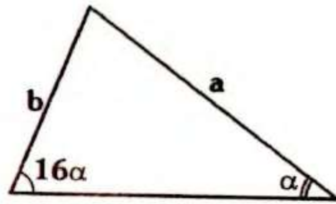
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BQ tal que QC = AB, $m\sphericalangle BAC = 20°$ y $m\sphericalangle BQC = 30°$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA N° 221

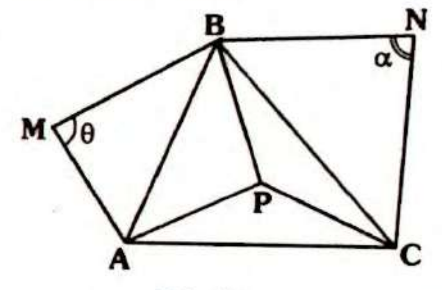
Del gráfico, indique la alternativa correcta:



A) $a < 16b$
B) $a = 16b$
C) $a > 16b$
D) $b < 16a$
E) $b > 16a$

PROBLEMA N° 222

En el gráfico $MB = NC = 12$, $AC = 15$, $BN = 9$, $\alpha < 90°$ y $\theta > 90°$. Si AB y BC toman su menor y mayor valor entero respectivamente. Calcule el mayor valor entero de PA+PB+PC.



A) 39
B) 40
C) 41
D) 27
E) 38

PROBLEMA N° 223

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$, las cuales se cortan en I, las bisectrices de los ángulos ANC y AIC se cortan en P, de modo que $m\measuredangle IAC = m\measuredangle ICA + m\measuredangle NPI$. Si la medida del menor ángulo entre $\overleftrightarrow{PI}$ y $\overrightarrow{BC}$ es 40°. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 50°

PROBLEMA N° 224

Dado el triángulo ABC, se ubica D y F en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si AD=AC y $m\measuredangle DAF = \dfrac{m\measuredangle FAC}{5} = \dfrac{m\measuredangle ABC}{4} = 10°$. Calcule $m\measuredangle DFA$.

A) 20°
B) 30°
C) 35°
D) 25°
E) 45°

PROBLEMA N° 225

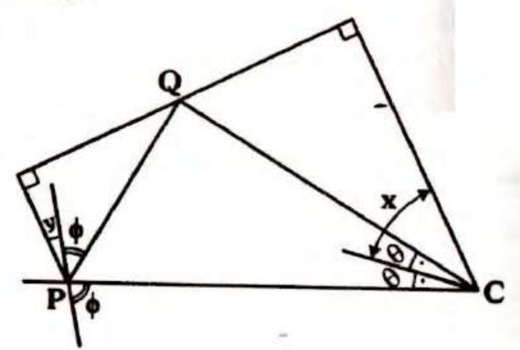
En el triángulo ABC, se traza una recta que corta a $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y a la prolongación de $\overline{CA}$ en S, Q y P respectivamente.

Si: $m\measuredangle BAC = m\measuredangle BSQ = 2(m\measuredangle ACB)$ y $SC - PQ = QB$. Calcule $m\measuredangle ACB$

A) 30°
B) 36°
C) 72°
D) 60°
E) 45°

PROBLEMA N° 226

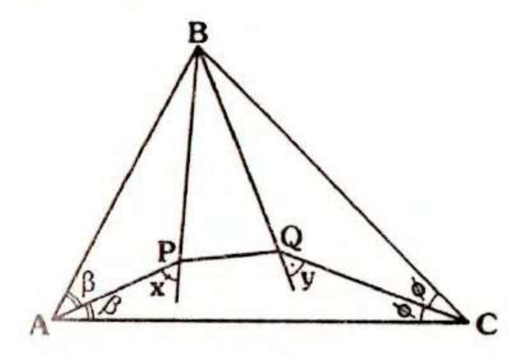
Del gráfico, calcule $m\measuredangle PQC$ en función de **x** e **y**.



A) $x + y$
B) $2(x + y)$
C) $\dfrac{(x+y)}{2}$
D) $180° - \dfrac{(x+y)}{2}$
E) $90° - \dfrac{(x+y)}{2}$

PROBLEMA Nº 227

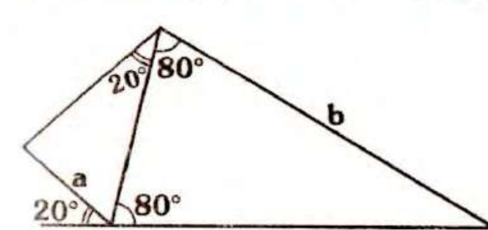
En el gráfico, $m\sphericalangle ABC - 2(m\sphericalangle PBQ) = 20°$. Calcule $x+y$.



A) 100° B) 105° C) 120°
D) 110° E) 115°

PROBLEMA Nº 228

En el gráfico, indique el intervalo para $\frac{b}{a}$



A) $\langle 8;10\rangle$ B) $[1;3\rangle$ C) $\langle 2;3\rangle$
D) $\langle 4;9\rangle$ E) $\langle 3;6\rangle$

PROBLEMA Nº 229

Se tiene el triángulo ABC, P es un punto interior y S es exterior y relativo a $\overline{AC}$, tal que $\overline{PS} \cap \overline{AC} = \{L\}$,

$$m\sphericalangle PLC - m\sphericalangle PLA = 20°$$

Si: $$\frac{m\sphericalangle BAP}{m\sphericalangle PAC} = \frac{m\sphericalangle BCP}{m\sphericalangle PCA} = 4$$ y

$$\frac{m\sphericalangle ABS}{m\sphericalangle SBC} = \frac{m\sphericalangle APS}{m\sphericalangle SPC} = 1$$

Calcule $m\sphericalangle BSP$

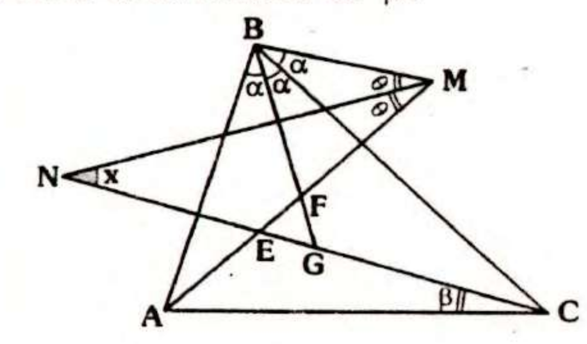
A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 60°

PROBLEMA Nº 230

En el gráfico, EF = EG,

$m\sphericalangle CAM = 3(m\sphericalangle MAB)$ y
$m\sphericalangle BCN = 3(m\sphericalangle NCA)$

Calcule **x** en función de β.



A) β B) $45° + \beta$ C) $90° - \frac{\beta}{2}$
D) $45° - \frac{\beta}{2}$ E) $60° - \beta$

PROBLEMA Nº 231

Se ubica P en la región interior del triángulo equilátero ABC, tal que AP = 2 y PC = 7. Calcule la razón entre los perímetros máximo y mínimo enteros del triángulo ABC.

A) 13/11 B) 12/11 C) 4/3
D) 6/5 E) 7/6

PROBLEMA Nº 232

En el triángulo ABC, se ubica M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $14(m\sphericalangle NAM) = 7(m\sphericalangle NAC) = 2(m\sphericalangle ACB)$

AM = MN = NC. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 36° B) 18° C) 24°
D) 30° E) 27°



PROBLEMA Nº 233

En el triángulo ABC(AB = BC), las cevianas interiores AQ y CP se intersecan en L, tal que m∢AQC = 2(m∢ACP), entonces se puede afirmar:

A) AL > AP B) AL > PL
C) AL < AP D) AP = AL
E) LP = AP

PROBLEMA Nº 234

En el gráfico, AB=BE. Calcule **x**.

A) 15°
3) 20°
:) 30°
)) 25°
:) 18°

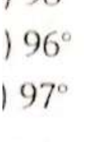
PROBLEMA Nº 235

ie tiene el triángulo rectángulo ABC (rec-o en B), se ubica E en $\overline{AB}$ y G en la prolongación de $\overline{BC}$. Si $\overline{EG} \cap \overline{AC} = \{F\}$ y os triángulos AEF y FCG son isósceles. Calcule m∢GEB.

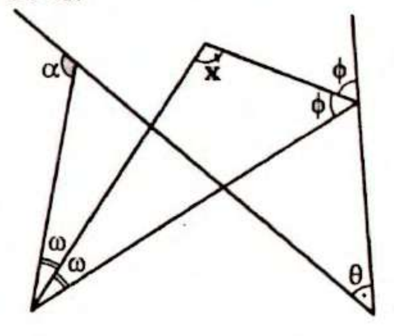
) 30° B) 60° C) 45°
) 50° E) 37°

PROBLEMA Nº 236

n el gráfico, $\alpha + \theta < 170°$. Calcule el me-or valor entero de **x**.



) 90°
) 94°
) 98°
) 96°
) 97°



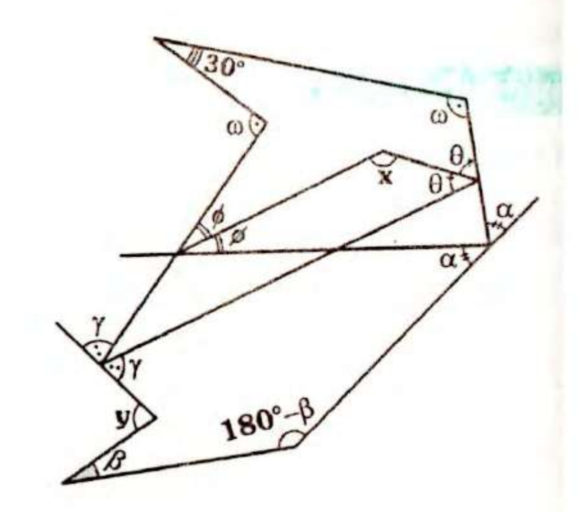
PROBLEMA Nº 237

Se tiene el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, una recta corta a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y a la prolongación de $\overline{BA}$ en P, Q y R respectivamente. Si m∢BPQ = a y m∢AQR = b. Calcule m∢BRP.

A) a − b B) a + b C) 2a − b
D) a − 2b E) 3a − b

PROBLEMA Nº 238

Del gráfico calcule x + y.



A) 240° B) 215° C) 190°
D) 210° E) 220°

PROBLEMA Nº 239

En el triángulo ABC se ubica P en la región interior tal que:

$$\frac{m\measuredangle PCA}{4} = \frac{m\measuredangle PAC}{3} = \frac{m\measuredangle PAB}{2} = m\measuredangle PCB = 10°$$

Calcule m∢PBC.

A) 28° B) 20° C) 15°
D) 30° E) 10°

PROBLEMA Nº 240

En el triángulo ABC se ubican P y Q (Q en PC) en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubican M y N tal que $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son parte de las bisectrices exteriores trazadas desde B y C. Si $\overline{AQ}$ es bisectriz interior, $\overline{AQ} // \overline{MP}$ y $\overline{NP} // \overline{AC}$.

Calcule $m\measuredangle BMP + m\measuredangle PNC$.

A) 45° B) 60° C) 75°
D) 120° E) 90°

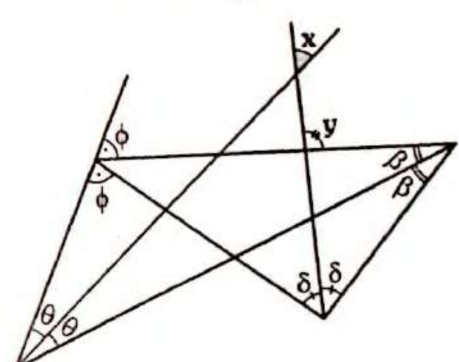
PROBLEMA Nº 241

La bisectriz interior trazada en un triángulo escaleno determina con el lado opuesto ángulos cuya razón de medidas es 7/13. Si los tres ángulos interiores son menores que 80°. Calcule la medida del menor ángulo interior del triángulo dado.

A) 79° B) 78° C) 25°
D) 24° E) 76°

PROBLEMA Nº 242

Del gráfico, calcule $\frac{x}{y}$



A) 2 B) 3 C) 2/3
D) 1/2 E) 3

PROBLEMA Nº 243

Se tiene el triángulo ABC (AB = BC), se ubican S y K en las prolongaciones de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $\overline{CS}$ divide al ángulo ACK en la razón de 2 a 3. Calcule el mayor valor entero de $m\measuredangle ABC$.

A) 77° B) 74° C) 76°
D) 68° E) 60°

PROBLEMA Nº 244

Se tiene el triángulo ABE, en la prolongación de $\overline{AE}$ se ubica C, luego ubicamos D en $\overline{AB}$. Si $m\measuredangle BEC = 120°$ y AB = AC = CD.

Calcule la cantidad de valores enteros para $m\measuredangle ABE$.

A) 18 B) 17 C) 29
D) 19 E) 28

PROBLEMA Nº 245

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AB, OQ y BR, tal que AP = CQ = BR, si "p" es el semiperímetro de la región ABC, indique el intervalo para CQ.

A) $\left\langle \frac{p}{3};p \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{p}{2};2p \right\rangle$ C) $[p\,;\,3p\rangle$

D) $\langle p;3p \rangle$ E) $\left\langle \frac{p}{3};2p \right\rangle$

PROBLEMA Nº 246

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la ceviana interior AQ. Si BQ = 2, QC = 3 y

$$2(m\measuredangle CAQ) + 3(m\measuredangle BAQ) = 90°$$

Calcule AQ.

A) 8 B) 7 C) 5
D) 4 E) 6

PROBLEMA Nº 247

En la región exterior relativa a $\overline{AC}$ del triángulo ABC, se ubica D tal que

$$\frac{m\measuredangle ABD}{6}=\frac{m\measuredangle ADB}{15}=\frac{m\measuredangle BDC}{14}=\frac{m\measuredangle DBC}{8}=5^\circ$$

Calcule la medida del ángulo entre $\overrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 80° E) 85°

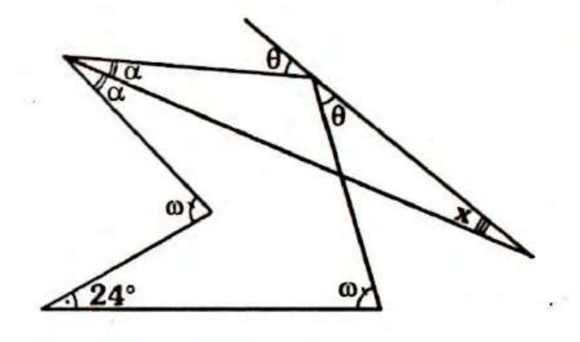
PROBLEMA Nº 248

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BN y en el triángulo ANB se traza la ceviana interior NM. Si $2(m\measuredangle BNC)=3(m\measuredangle MNB)$, $AM=AN$ y $NB=BC$. Calcule el número de valores enteros de $m\measuredangle BNM$.

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

PROBLEMA Nº 249

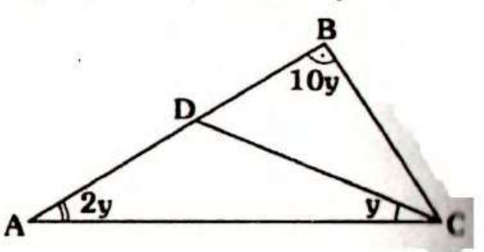
Del gráfico, calcule **x**.



A) 10° B) 24° C) 18°
D) 36° E) 12°

PROBLEMA Nº 250

En el gráfico, AD=BC, calcule **y**.



A) 5°
B) 10°
C) 8°
D) 15°
E) 6°

PROBLEMA Nº 251

En el triángulo ABC se ubica P en la región exterior relativa a $\overline{BC}$, tal que $AB=c$; $CP=\ell$; $m\measuredangle BAC=2(m\measuredangle BCA)$ y $m\measuredangle CBP=2(m\measuredangle BPC)$. Entonces se cumple:

A) $\ell=4c$ B) $\ell<c$ C) $4\ell<c$
D) $\ell<4c$ E) $2\ell<c$

PROBLEMA Nº 252

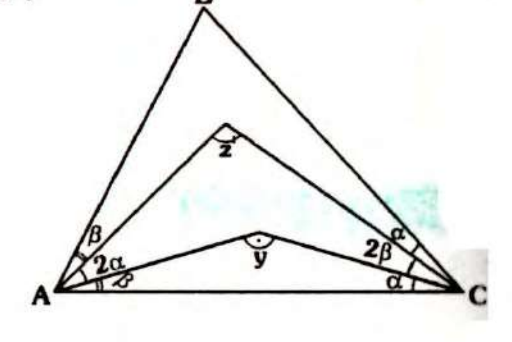
En el triángulo $ABC(AB=BC)$ se traza la altura CH y la bisectriz interior AM, tal que $m\measuredangle ABC$ es el doble de la medida del ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos HCB y AMB. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 50° C) 40°
D) 80° E) 60°

PROBLEMA Nº 253

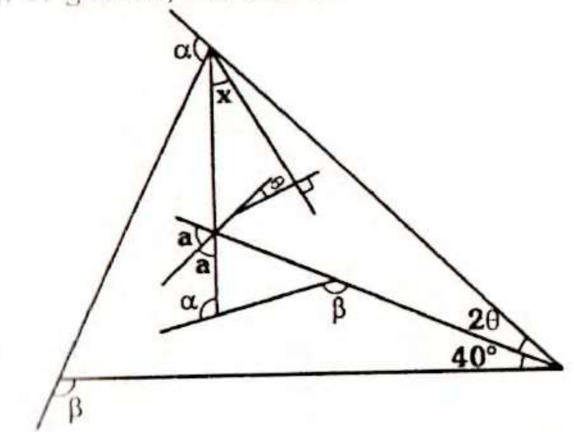
En el gráfico, el triángulo ABC es acutángulo. Calcule el mayor valor entero de $y+z$.

A) 269°
B) 271°
C) 241°
D) 259°
E) 239°



PROBLEMA Nº 254

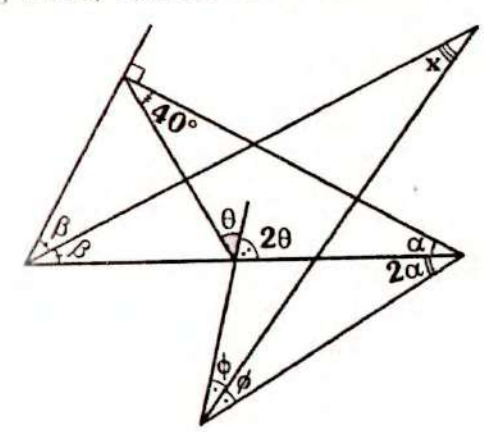
n el gráfico, calcule **x**.



A) 40°   B) 50°   C) 30°
D) 25°   E) 20°

PROBLEMA Nº 255

Del gráfico, calcule **x** en función de β.



A) $\dfrac{320°-5\beta}{3}$ B) $110°-3\beta$

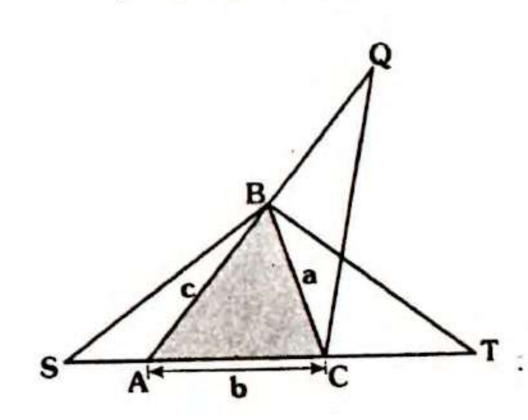
C) $\dfrac{320°-4\beta}{3}$ D) $\dfrac{320°-7\beta}{3}$

E) $\dfrac{5\beta-220°}{3}$

PROBLEMA Nº 256

En el gráfico, el semiperímetro de la región sombreada es P, si $(BS)(BT)(CQ)=\dfrac{1}{k^3}$ y k es entero, calcule el menor valor entero de:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}$$



A) $k-1$ B) $3k-1$

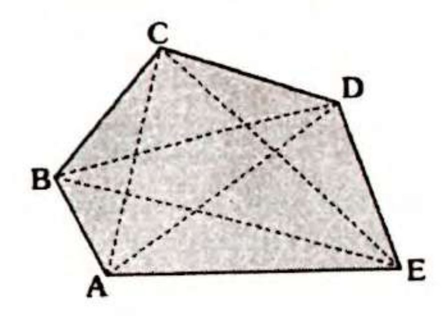
C) $3k+1$ D) $2k-1$

E) $2k+1$

PROBLEMA Nº 257

En el gráfico, el perímetro de la región sombreada es ℓ, AB=a y AE=m si $AE>ED>DC>CB>BA$. Indique el intervalo de:

$$AC+BD+CE+DA+EB$$



A) $\langle m;\ell+a\rangle$ B) $[m-a;2\ell]$

C) $\langle 2m;2\ell]$ D) $\langle 2m-2a;2\ell\rangle$

E) $\langle m;2\ell+a\rangle$

PROBLEMA Nº 258

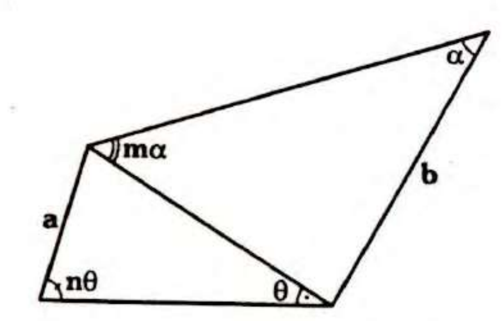
Se tiene el triángulo ABC(AB = BC), se ubican M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectiva-

mente tal que $AM=4$ y $CN=3$. Calcule el mayor valor entero de $AN+CM$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 7

PROBLEMA Nº 259

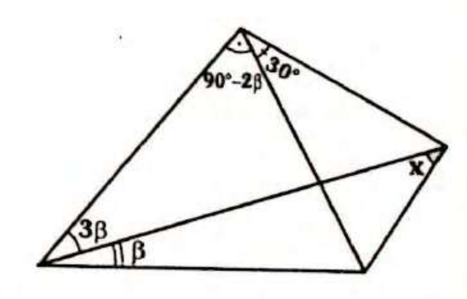
En el gráfico, indique la relación correcta, si n y $m \in \mathbb{Z}^+$.



A) $b < mna$ B) $a < mn + b$
C) $b > mna$ D) $a > mnb$
E) $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$

PROBLEMA Nº 260

Del gráfico, calcule **x**.



A) 10° B) 15° C) 30°
D) 22°30' E) 45°



PROBLEMA Nº 261

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Ocho puntos del espacio son vértices como máximo de 56 triángulos.

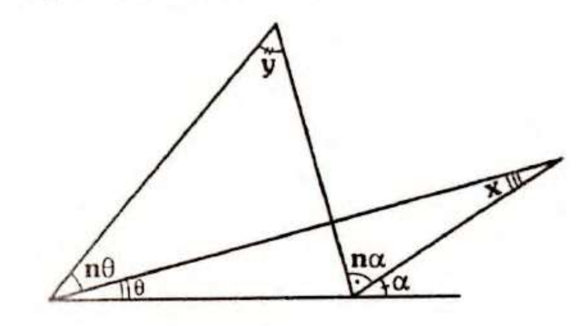
II. Si los lados de un triángulo miden 2, $\sqrt{7}$ y 4, entonces dicho triángulo es obtusángulo.

III. Todo triángulo escaleno es oblicuángulo.

A) VFV B) VFF C) FFF
D) VVF E) FVF

PROBLEMA Nº 262

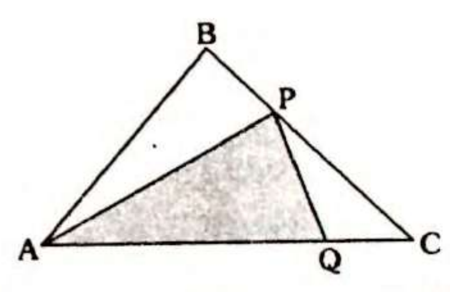
Del gráfico, calcule **x**.



A) $\frac{y}{n}$ B) $\frac{y}{n+1}$ C) $\frac{y}{n-1}$
D) $\frac{y}{8-n}$ E) $\frac{y}{2n-1}$

PROBLEMA Nº 263

En el gráfico, AB=BC y el perímetro de la región sombreada es 20. Calcule el mayor valor entero de PC.



A) 10 B) 9 C) 8
D) 7 E) 6

PROBLEMA Nº 264

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior BM y en el triángulo BMC se traza la bisectriz interior CN. Si AB=AM, calcule m∢CNM.

A) 30° B) 60° C) 30°
D) 45° E) 22°30'

PROBLEMA Nº 265

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CP, luego en el triángulo APC se traza la ceviana interior AM en cuya prolongación se ubica N tal que:

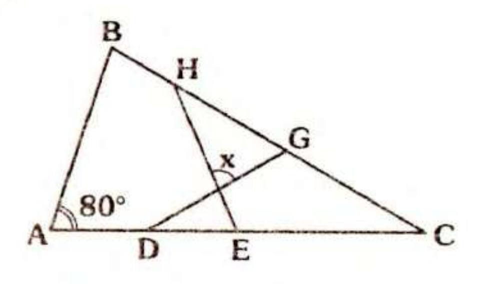
$m\sphericalangle MAP = 3(m\sphericalangle MAC)$; $m\sphericalangle ABC = 40°$ y

$m\sphericalangle BCN = 90° - \frac{3}{4}(m\sphericalangle ACB)$

Calcule m∢CNM

A) 40° B) 60° C) 50°
D) 45° E) 55°

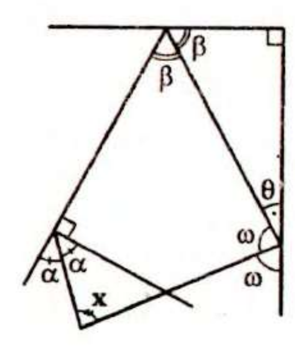
Calcule **x**.



A) 70° B) 80° C) 60°
D) 100° E) 90°

PROBLEMA Nº 280

Del gráfico, calcule "x" en función de θ.



A) $90° - \frac{2}{3}\theta$ B) $45° + \frac{3}{2}\theta$

C) $45° + \theta$ D) $90° - \frac{3}{2}\theta$

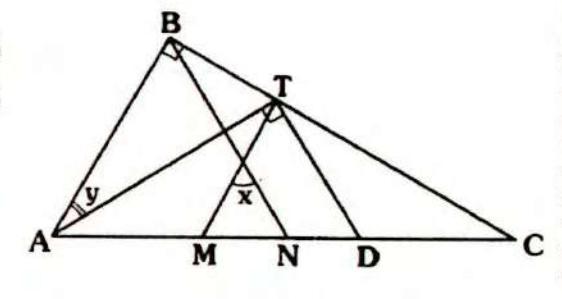
E) $90° - \frac{\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 281

En el gráfico MT=MD y BN=NC.

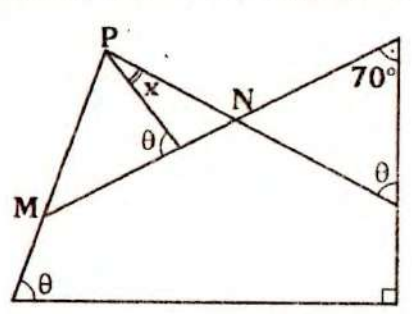
Calcule $\frac{x}{y}$.

A) 0,5
B) 1,5
C) 1
D) 2
E) 3



PROBLEMA Nº 282

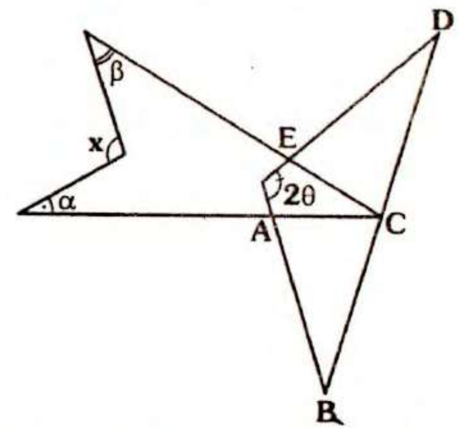
En el gráfico, MP=PN, calcule $x+\theta$.



A) 80° B) 85° C) 95°
D) 120° E) 110°

PROBLEMA Nº 283

En el gráfico, AB=BC y CD=DE y $\alpha+\beta-\theta=70°$. Calcule **x**.



A) 160° B) 130° C) 170°
D) 100° E) 110°

PROBLEMA Nº 284

En un triángulo isósceles de base BC (AB > BC), se traza la bisectriz exterior BP y en el triángulo BPC se traza la bisectriz interior PQ. Si BP=9 y QC=3. Calcule PC.

A) 4,5 B) 5,5 C) 6
D) 5 E) 4

PROBLEMA Nº 285

En un triángulo ABC, se ubica D en la región interior, tal que AD=BC, $m\sphericalangle ADC=120°$, $m\sphericalangle DBC=66°$ y $m\sphericalangle DCB=16°$. Calcule $m\sphericalangle ABD$

A) 40° B) 45° C) 30°
D) 25° E) 20°

PROBLEMA Nº 286

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BP y la bisectriz interior CN, de tal manera que los ángulos ABP y ABC son suplementarios. Si $m\sphericalangle BNC$ es el mayor valor entero par. Calcule $m\sphericalangle BPA$

A) 8° B) 4° C) 10°
D) 3° E) 2°

PROBLEMA Nº 287

En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, si AB=3, BC=4 y AC toma su mayor valor entero, calcule el mayor valor de (AP)(PC).

A) 36 B) 35 C) 9
D) 12 E) 18

PROBLEMA Nº 288

En el triángulo ABC, la altura BH y la bisectriz interior AM se cortan en Q. Si BQ=BM, calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 60° B) 120° C) 90°
D) 75° E) 135°

PROBLEMA Nº 289

En el triángulo APC, la bisectriz interior desde A y la exterior de C, se cortan en P_1; en el triángulo AP_1C, se hace el mismo procedimiento y se encuentra P_2 y asi sucesivamente. Si $m\sphericalangle APC=\theta$. Calcule la suma límite de las medidas de los menores ángulos en P_1; P_2; P_3 ...

A) θ B) 2θ C) $\theta/2$
D) 3θ E) $\theta/4$

PROBLEMA Nº 290

En el triángulo ABC, se ubica P y Q en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ si AB=AQ=AP; PC > PQ y $m\sphericalangle BAC=40°$. Calcule el mayor entero de $m\sphericalangle PCB$.

A) 39° B) 41° C) 19°
D) 21° E) 20°

PROBLEMA Nº 291

En el triángulo ABC se cumple $m\sphericalangle ABC-m\sphericalangle BCA=40°$. Se ubica P en la región interior, tal que:

$$m\sphericalangle ABP=3(m\sphericalangle PBC) \quad y$$

$$m\sphericalangle ACP=3(m\sphericalangle BCP)$$

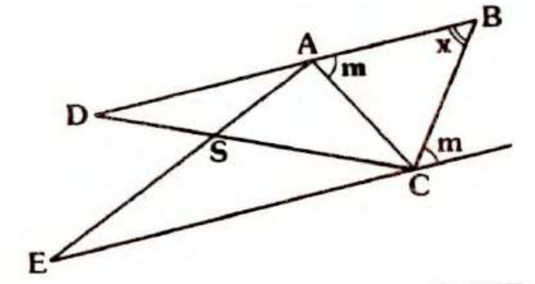
Calcule la medida del ángulo entre las bisectrices de los ángulos BPC y BAC.

A) 20° B) 30° C) 25°
D) 15° E) 32°

PROBLEMA Nº 292

En el gráfico, AB=BC, SD=SA y SE=SC, calcule **x**.

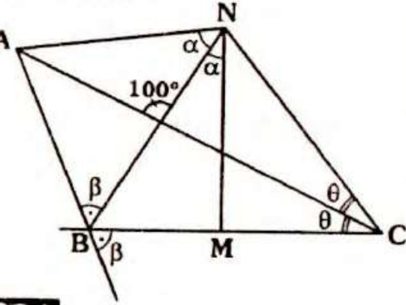
A) 50°
B) 60°
C) 70°
D) 80°
E) 65°



PROBLEMA Nº 293

En el gráfico $m\sphericalangle BNC = 2(m\sphericalangle NAC)$, calcule $m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle NMB$.

A) 160°
B) 200°
C) 210°
D) 220°
E) 250°



PROBLEMA Nº 294

En el triángulo equilátero ABC se ubica en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ los puntos E, F y D respectivamente si $m\sphericalangle EDF = 90°$, BF=BD y EB=ED. Calcule $m\sphericalangle AED$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 60°

PROBLEMA Nº 295

En el gráfico, PC=CQ.
Calcule $x + y$.

A) 104°
B) 108°
C) 148°
D) 138°
E) 152°

PROBLEMA Nº 296

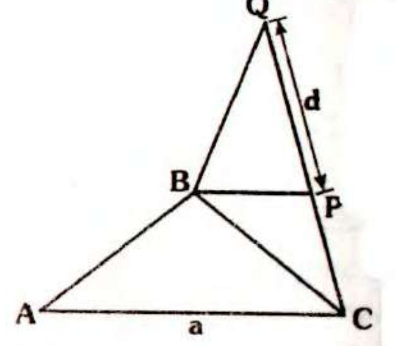
En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN de modo que $m\sphericalangle BNC = m\sphericalangle AMC$. En el triángulo BNC las bisectrices interiores se cortan en I, mientras que en el triángulo AMC la bisectriz interior trazado de A y la exterior trazada de C se cortan en J. Calcule: $m\sphericalangle BIC - m\sphericalangle AJC$.

A) 45° B) 90° C) 60°
D) 155° E) 18°

PROBLEMA Nº 297

En el gráfico los triángulos ABC; BPC y BQP son isósceles de bases $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BP}$ respectivamente, indique la relación correcta:

A) $4a > d$
B) $a < 8d$
C) $2a < d$
D) $4a < d$
E) $8a < d$



PROBLEMA Nº 298

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior AM, en $\overline{AC}$ se ubica N, tal que MC=NC y $m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle AMN = 150°$. Calcule $m\sphericalangle ABC - m\sphericalangle NMA$.

A) 60° B) 50° C) 30°
D) 75° E) 45°

PROBLEMA Nº 299

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM y en su prolongación se ubica D, tal que AB=BC=CD. Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, calcule $m\sphericalangle CMD$.

A) 30° B) 36° C) 45°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº 300

En el triángulo ABD se ubica el punto Q en la región exterior relativa a $\overline{BD}$, tal que AD=DQ, $m\sphericalangle BAQ = 30°$, $m\sphericalangle ABD = 18°$ y $m\sphericalangle BDQ = 42°$. Calcule $m\sphericalangle DBQ$.

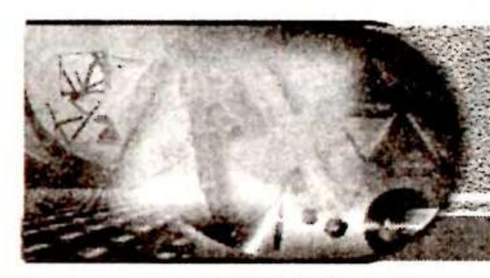
A) 20° B) 15° C) 16°
D) 30° E) 25°

Geometría

SOLUCIONARIO

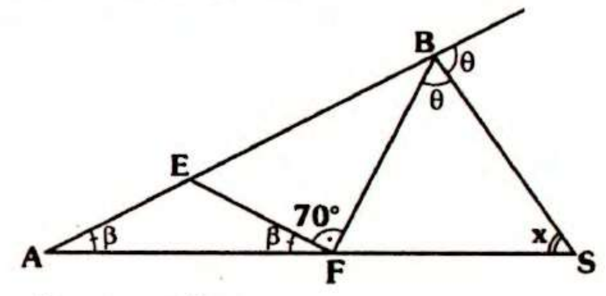
- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

TRIÁNGULOS



Solucionario Ciclo Anual

RESOLUCIÓN Nº 01



- Se nos pide: x
- Por dato $AE = EF \Rightarrow \Delta AEF$ es isósceles completando ángulos:

$$m\measuredangle EAF = m\measuredangle AFE = \beta$$

- Por ángulo exterior:

En ΔABS: $x + \beta = \theta$ ...(I)

En ΔBSF: $x + \theta = 70° + \beta$ ...(II)

- Sumando (I) y (II):

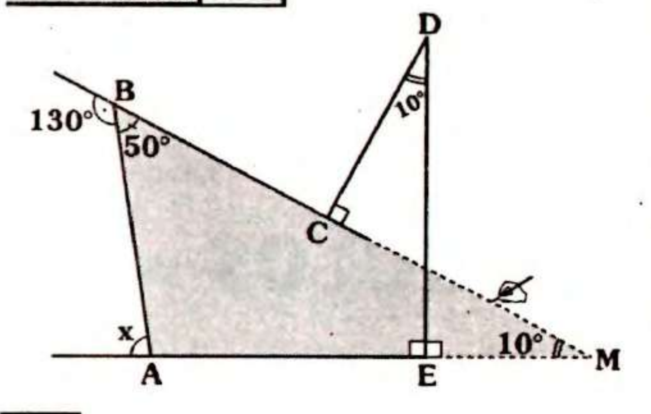
$$2x + \theta + \beta = 70° + \theta + \beta$$

$$\Rightarrow 2x = 70°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 35°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 2



- Se nos pide: x
- Para observar un triángulo donde "x" sea la medida de un ángulo exterior, se prolonga $\overline{BC}$ y $\overline{AE}$ $\Rightarrow$ se tiene el ΔABM.
- En ∡ por teorema:

$$m\measuredangle EMC + 90° = 10° + 90° \Rightarrow m\measuredangle EMC = 10°$$

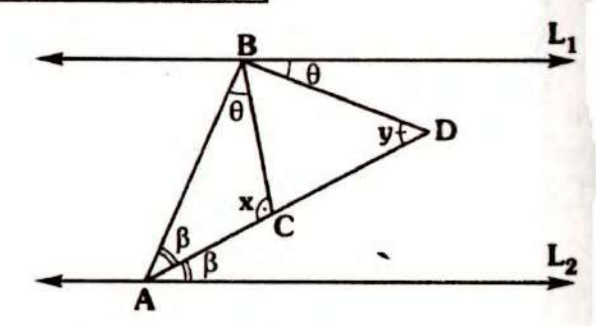
- En Δ ABM, por ángulo exterior:

$$x = 50° + 10°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 60°}$$

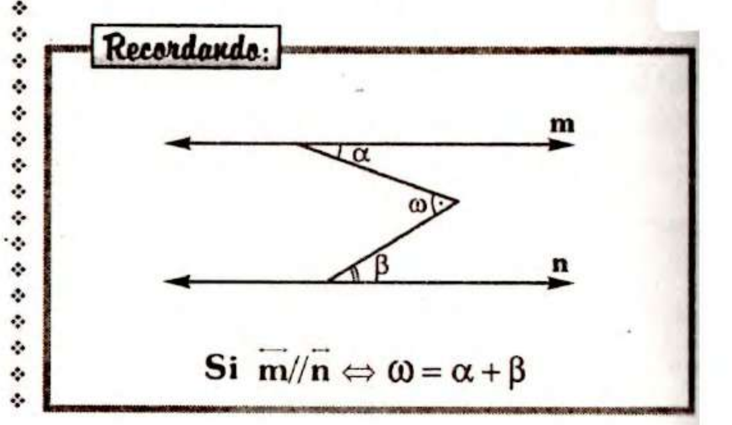
Clave C

RESOLUCIÓN Nº 3



- Se nos pide: $x + y$

Recordando:



Si $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n} \Leftrightarrow \omega = \alpha + \beta$

- Luego: $y = \theta + \beta$
- En $\triangle ABC$:

$$x + \underbrace{\theta + \beta}_{y} = 180°$$

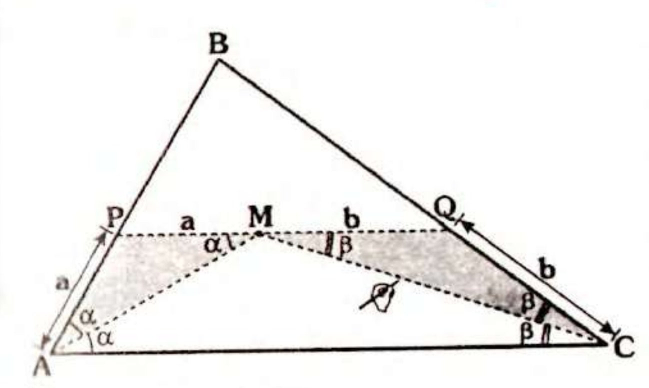
$$\therefore \ \mathbf{x + y = 180°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 4

El primer paso es graficar de acuerdo a las condiciones, para ello lee detenidamente y bosquejalo.

- Así tenemos:



- Se nos pide PQ.
- Dato: $a + b = 6$
- Como $\overline{PQ} // \overline{AC} \Rightarrow$ por ángulos alternos internos:

$$m\measuredangle PMA = \alpha \ \text{ y } \ m\measuredangle CMQ = \beta$$

- Luego:

$\triangle APM$ y $\triangle MQC$: isósceles

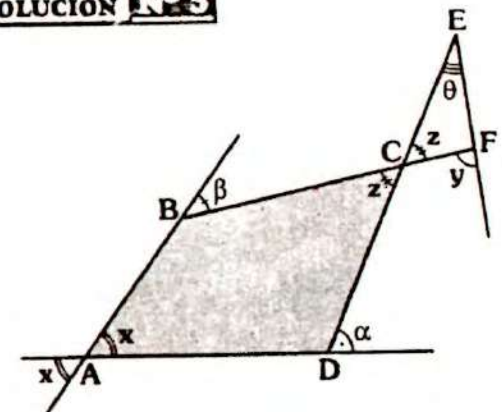
$\Rightarrow PM = a \quad$ y $\quad MQ = b$

$\Rightarrow PQ = a + b$

$$\therefore \ \mathbf{PQ = 6}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 5



- Se nos pide: $\alpha + \beta + \theta$
- Tenemos como dato: $x + y = 80°$
- En ⏢, por teorema:

$$\alpha + \beta = x + z \qquad \dots (I)$$

- En $\triangle CEF$, por ángulo exterior

$$\theta + z = y \qquad \dots (II)$$

- Sumando (I) y (II):

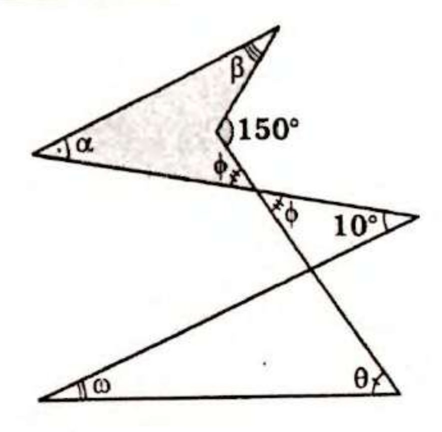
$$\alpha + \beta + \theta + \not{z} = x + y + \not{z}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \theta = x + y$$

$$\therefore \ \alpha + \beta + \theta = \mathbf{80°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 6



- Piden: $\alpha + \beta + \theta + \omega$
- En ⏢: $\alpha + \beta + \phi = 150° \qquad \dots (I)$
- En ⧖ : $\omega + \theta = 10° + \phi \qquad \dots (II)$

- Sumando (I) y (II):

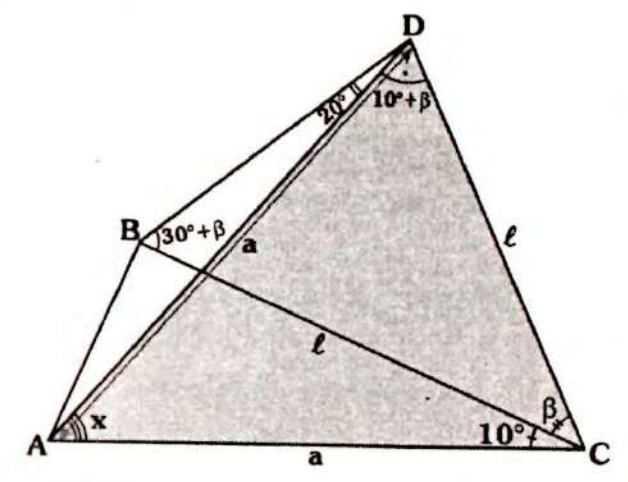
$$\alpha+\beta+\theta+\omega+\not{\phi}=150°+10°+\not{\phi}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta+\theta+\omega=\mathbf{160°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 7

- Graficando:



- Piden: x
- Tenemos por dato: AC=AD y BC=CD

$\Rightarrow$ ΔADC y ΔBCD : isósceles

- Luego:

$$m\measuredangle ADC=m\measuredangle ACD=10°+\beta$$
$$m\measuredangle BDC=m\measuredangle DBC=30°+\beta$$

- En ΔADC:

$$x+20°+2\beta=180° \quad \dots (I)$$

- En ΔBCD:

$$30°+\beta+\beta+30°+\beta=180°$$
$$\Rightarrow\ \beta=40°$$

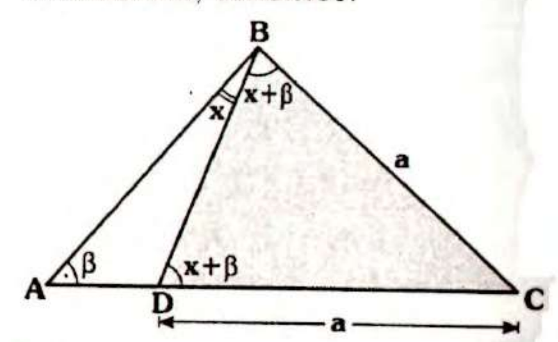
- En (I):

$$x+20°+2(40°)=180°$$
$$\therefore\ \mathbf{x=80°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 8

- Graficando, tenemos:



- Piden: x
- Dato: $m\measuredangle ABC=80°+m\measuredangle BAC$

$BC=CD$

- Del último dato: ΔDCB es isósceles

$$\Rightarrow\ m\measuredangle CDB=m\measuredangle DBC=x+\beta$$

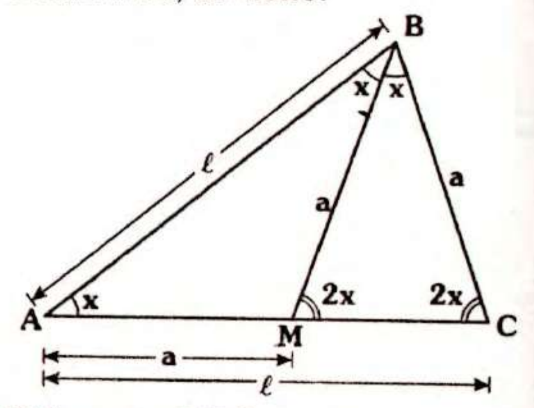
- Del primer dato:

$$2x+\not{\beta}=80°+\not{\beta}$$
$$\therefore\ \mathbf{x=40°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 9

- Graficando, se tiene:



- Piden: $m\measuredangle MBC$
- De los datos ΔAMB, ΔMBC y ΔABC son isósceles, completemos medidas angulares:

Sea $m\measuredangle MAB=x\ \Rightarrow\ m\measuredangle ABM=x$

- Por ∢ exterior: $m\sphericalangle BMC = 2x$

$\triangle MBC$: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle MCB = 2x$

$\triangle ABC$: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle ABC = 2x$

$\Rightarrow m\sphericalangle MBC = x$

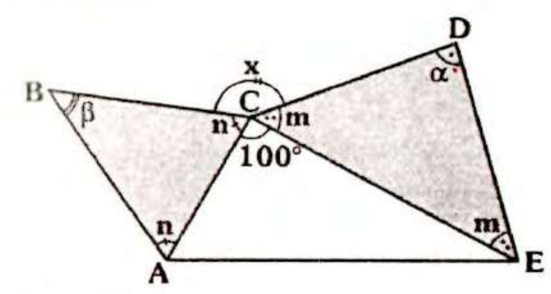
- Finalmente:

$\triangle MBC: \ 2x + 2x + x = 180°$

$\therefore \ \mathbf{x = 36°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 10



- Piden: x
- Tenemos por dato: $\alpha + \beta = 140°$
- También por dato los triángulos ABC y CDE son isósceles de bases $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$.

$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA = n$

$m\sphericalangle DCE = m\sphericalangle CED = m$

- Luego:

$x + m + n + 100° = 360°$ ... (I)

- En $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$:

$2n + \beta = 180°$ ... (II)

$2m + \alpha = 180°$ ... (III)

- Sumando (II) y (III)

$2n + 2m + \underbrace{\alpha + \beta}_{140°} = 360°$

$\Rightarrow m + n = 110°$

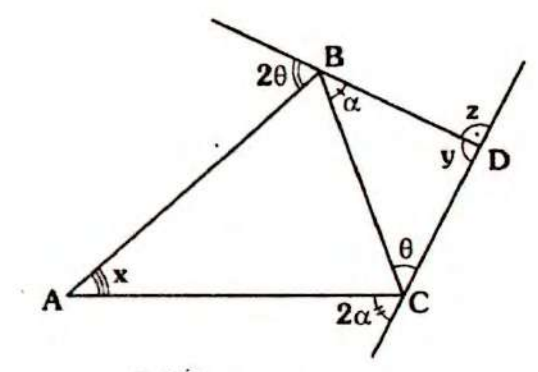
- En (I):

$x + 110° + 100° = 360°$

$\therefore \ \mathbf{x = 150°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 11



- Piden: $\dfrac{x+y}{z}$
- Sea: $E = \dfrac{x+y}{z}$ ... (I)
- En $\triangle BCD$, por ángulo exterior:

$z = \alpha + \theta$ ... (II)

- En ⏢, por teorema 6:

$x + y = 2\alpha + 2\theta$

$x + y = 2(\alpha + \theta)$ ... (III)

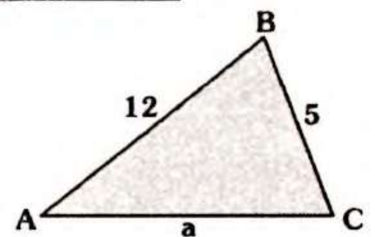
- Reemplazando en (I):

$E = \dfrac{2(\cancel{\alpha+\theta})}{\cancel{\alpha+\theta}}$

$\therefore \ \mathbf{E = 2}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 12



- Piden: $\text{perím}_{\blacktriangle ABC}$.
- Por dato el ΔABC es isósceles, es decir "a" es 5 ó 12.
- Pero antes, usemos existencia:

$$12-5<a<12+5$$
$$7<a<17$$

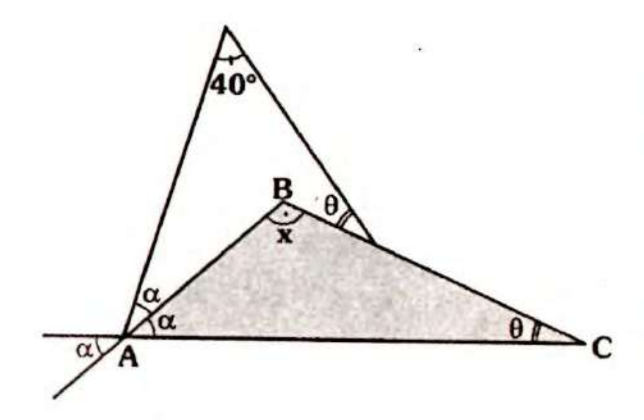
- El único valor para "a", para que el triángulo sea isósceles es 12.

$$\Rightarrow \text{Perím}_{\blacktriangle ABC}=12+12+5$$

$$\therefore \textbf{Perím}_{\blacktriangle ABC}=\mathbf{29\,cm}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 13



- Se nos pide: x
- En ΔABC : $x+\alpha+\theta=180°$ ... (I)
- En $\measuredangle$: $\alpha+\theta+40°=x$

$$\Rightarrow \alpha+\theta=x-40°$$

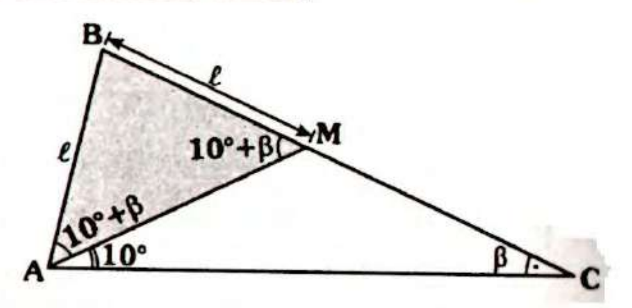
- Reemplazando en (I):

$$x+x-40°=180°$$

$$\therefore \mathbf{x=110°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 14



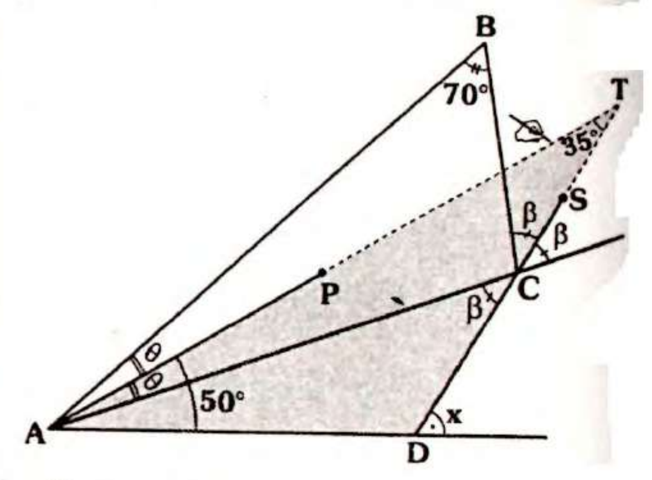
- Piden: $m\measuredangle BAC-m\measuredangle BCA$
- Como: $AB=BM \Rightarrow \Delta ABM$ es isósceles

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BAM=m\measuredangle AMB=10°+\beta$$
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BAC-m\measuredangle BCA=20°+\beta-\beta$$
$$\therefore \; m\measuredangle BAC-m\measuredangle BCA=20°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 15

Este problema se puede resolver completando ángulos, pero también de la siguiente forma.



- Se nos pide: x
- Prolongamos $\overline{AP}$ y $\overline{CS}$, para poder utilizar el teorema 27

$$\Delta ABC: m\measuredangle ATC=\frac{m\measuredangle ABC}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ATC=\frac{70°}{2}=35°$$

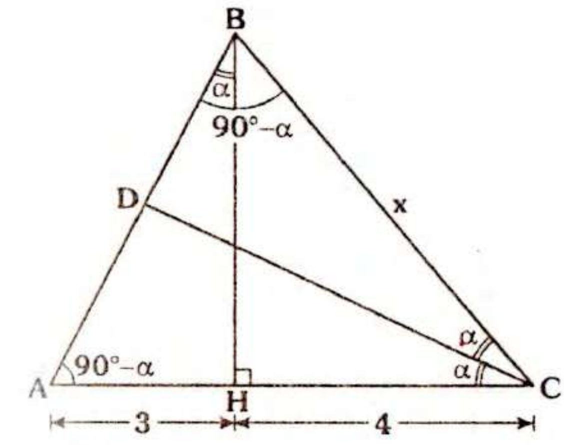
- En ΔATD, por ángulo exterior:

$$x = 50° + 35°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 85°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 16



- Piden: x
- En ◺ AHB: $m\measuredangle HAB = 90° - \alpha$
- En ΔABC, se tiene:

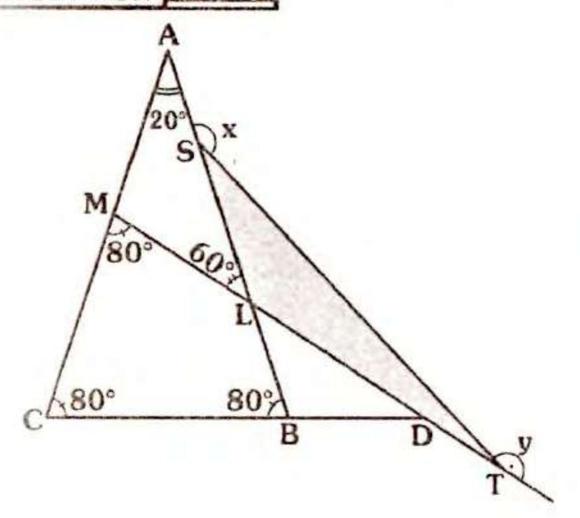
$m\measuredangle ACB = 2\alpha$ y $m\measuredangle CAB = 90° - \alpha$

$\Rightarrow m\measuredangle ABC = 90° - \alpha$, es decir el ΔABC es isósceles $\Rightarrow BC = AC$

$$\therefore \ \mathbf{x = 7}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 17



- Piden: $x + y$
- Por dato: $AB = AC$ y $DM = DC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ y ΔDMC son isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle ACB = m\measuredangle CBA = m\measuredangle CMD = 80°$

- En ΔLMA, por ángulo exterior:

$m\measuredangle MLA + 20° = 80° \Rightarrow m\measuredangle MLA = 60°$

Finalmente:

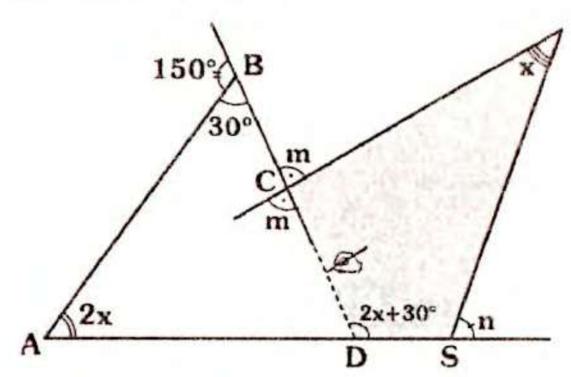
- En ΔTLS, por suma de ángulos exteriores.

$$x + y + 60° = 360°$$

$$\therefore \ \mathbf{x + y = 300°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 18



- Se nos pide x
- Dato: $m + n = 150°$
- Se prolonga $\overline{BC}$, hasta obtener el triángulo ABD, por ángulo exterior:

$$m\measuredangle SDB = 2x + 30°$$

- En ⊿, por teorema 6:

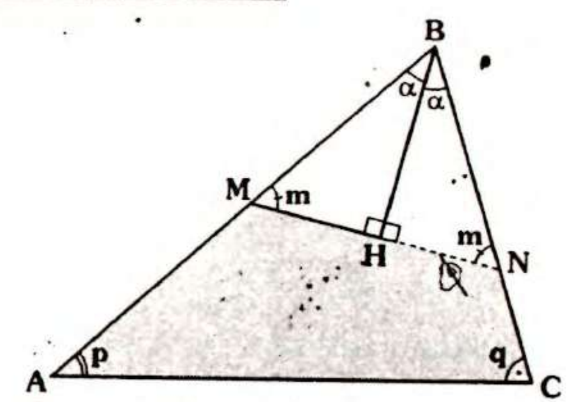
$$x + 2x + 30° = m + n$$

$$\Rightarrow 3x + 30° = 150°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 40°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 19



- Se nos pide la relación entre m, p y q
- Se prolonga $\overline{MH}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en N.
- En ◺MHB: $\alpha + m = 90°$

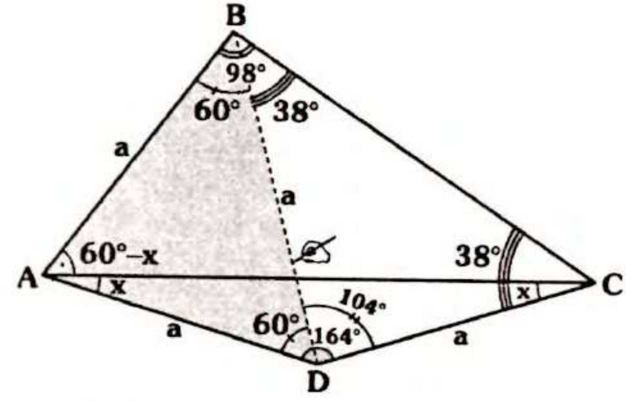
  $\Rightarrow$ En ◺HNB: $m\measuredangle HNB = m$
- En ⏢, por teorema 8:

$$m + m = p + q$$

$$\therefore\ \mathbf{m = \frac{p+q}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 20



- Piden: x
- Por dato: $AB = AD$
- Como: $m\measuredangle BAD = 60° \Rightarrow \Delta BAD$ es equilátero
- Luego:

  $m\measuredangle DBC = 38°$ y $m\measuredangle ADC = 104°$

  $\Rightarrow m\measuredangle DCB = 38°$

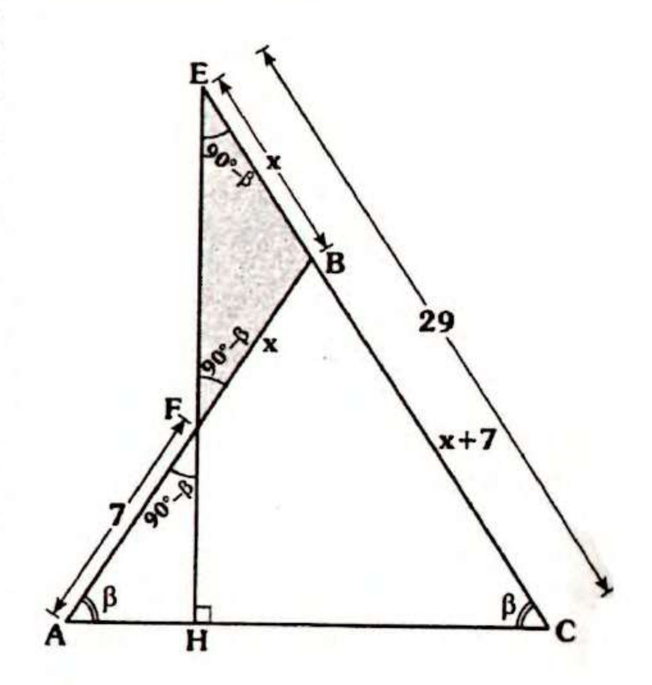
  $\Rightarrow \Delta BDC$: isósceles $\Rightarrow BD = DC = a$
- ΔADC: isósceles $\Rightarrow m\measuredangle ACD = x$

  $\Rightarrow x + x + 164° = 180°$

  $\therefore\ \mathbf{x = 8°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 21



- Piden: x
- Por dato ΔABC: isósceles $(AB = BC)$
- ◺HEC: $m\measuredangle HEC = 90° - \beta$
- ◺AHF: $m\measuredangle HFA = 90° - \beta$

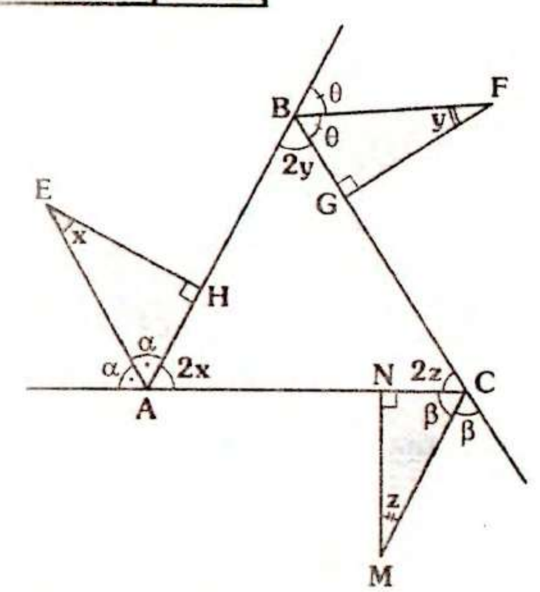
  ΔFBE es isósceles $\Rightarrow BF = BE = x$
- También $AB = BC = x + 7$

  $\Rightarrow x + x + 7 = 29$

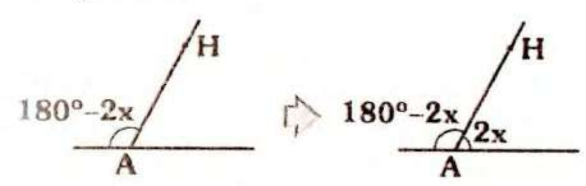
  $\therefore\ \mathbf{x = 11}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 22



- Piden: $x+y+z$
- En ◺AEH: $\alpha = 90° - x$
- Del gráfico:



- En forma análoga:

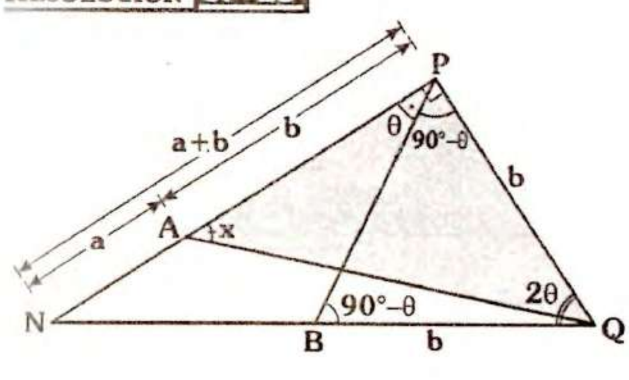
  $m\sphericalangle ABC = 2y \Rightarrow m\sphericalangle ACB = 2z$
- Finalmente en ΔABC:

$$2x + 2y + 2z = 180°$$

$$\therefore \; \mathbf{x+y+z=90°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 23



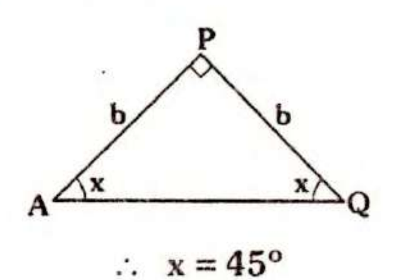
- Piden: x
- Dato: $NP = AN + QB$ y

  $m\sphericalangle PQN = 2(m\sphericalangle NPB)$
- Como:

  $m\sphericalangle NPQ = 90° \Rightarrow m\sphericalangle BPQ = 90° - \theta$
- En ΔBPQ se tiene:

  $m\sphericalangle BQB = 2\theta \Rightarrow m\sphericalangle PBQ = 90° - \theta$
- Luego el triángulo BPQ isósceles

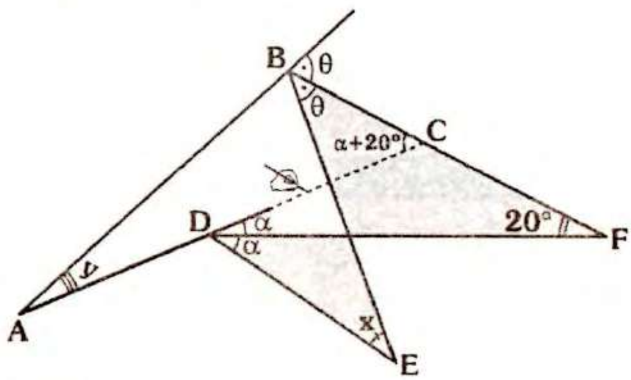
  $\Rightarrow BQ = PQ = b$
- Como: $NP = a + b \Rightarrow AP = b$
- En ◺APQ:



$$\therefore \; \mathbf{x = 45°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 24



- Piden: $x - y$
- En ⧖ : $x + \alpha = \theta + 20°$

  $\Rightarrow x = \theta + 20° - \alpha$
- En ΔABC, por ángulo exterior:

  $y + \alpha + 20° = \theta \Rightarrow y = \theta - \alpha - 20°$

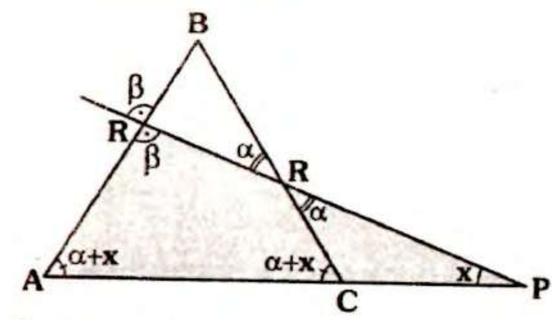
- Finalmente:

$$x-y=(\theta-20^\circ-\alpha)-(\theta-\alpha-20^\circ)$$

$$\therefore\ \mathbf{x-y=40^o}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 25



- Se nos pide: x
- Dato: $\alpha+\beta=40$ y AB=BC
- En ΔCRP por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle RCA=\alpha+x$$

- Como: $AB=BC \Rightarrow \Delta ABC$ es isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle ACB=\alpha+x$$

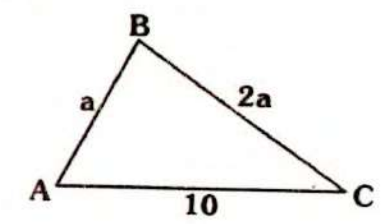
- En ΔARP :

$$\underbrace{\alpha+\beta}_{40^\circ}+x+x=180^\circ$$

$$\therefore\ \mathbf{x=70^o}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 26



- Piden: $a_{(\text{menor entero})}$
- Por existencia de triángulos:

$$2a-a<10<2a+a$$

$$a<10<3a$$

- Se tendrá entonces:

$$a<10$$

$$10<3a \Rightarrow \frac{10}{3}<a$$

- De donde tenemos la variación de a:

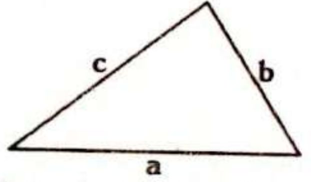
$$\frac{10}{3}<a<10$$

$$3{,}33<a<10$$

$$\therefore\ \mathbf{a_{(menor\ entero)}=4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 27



- Nos piden el mayor valor entero de a (en realidad, puede ser "b" o "c")
- Dato: $a+b+c=40$
- Por existencia de triángulos: $a<b+c$
- Sumando "a": $a+a<a+b+c$

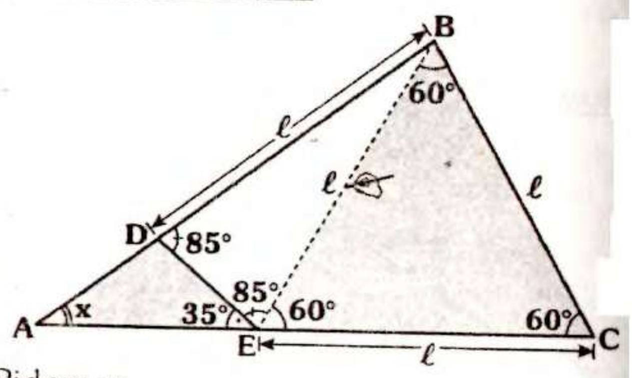
$$\Rightarrow 2a<40$$

$$a<20$$

- Como $a<20$, el mayor valor entero es **19**.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 28



Piden: x

Dato: BD = BC = EC

Como $BC = CE$ y $m\sphericalangle BCE = 60°$, al trazar $\overline{BE}$ el triángulo EBC resulta ser equilátero.

$$\Rightarrow EB = \ell \quad y \quad m\sphericalangle BEC = 60°$$

$\triangle BED$ es isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle BDE = m\sphericalangle DEB = 85°$$

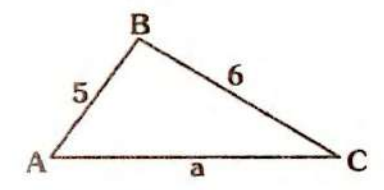
En $\triangle AED$, por ángulo exterior:

$$x + 35° = 85°$$

$$\therefore \mathbf{x = 50°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 29



Piden: $perímetro_{(\triangle ABC)}$

Por dato: $a = 2(AB)$ o $a = 2(BC)$, pero antes, utilicemos existencia:

$$6 - 5 < a < 6 + 5$$

$$1 < a < 11$$

Deacuerdo al dato, la única posibilidad para que "a" sea el doble de uno de los otros dos es:

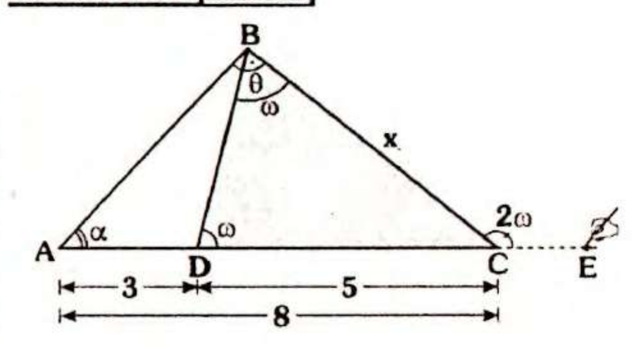
$$a = 10$$

$$\Rightarrow Perímetro_{(\triangle ABC)} = 10 + 5 + 6$$

$$\therefore \mathbf{Perímetro_{(\triangle ABC)} = 21}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 30



- Piden: x
- Dato: $\alpha + \theta = 2\omega$, $AD = 3$ y $AC = 8$

$$\Rightarrow DC = 5$$

- Por $\sphericalangle$ exterior, en el triángulo ABC:

$$m\sphericalangle BCE = \alpha + \theta$$

- Del primer dato: $m\sphericalangle BCE = 2\omega$
- En $\triangle DBC$:

  Como: $m\sphericalangle BDC = \omega$ y $m\sphericalangle BCE = 2\omega$

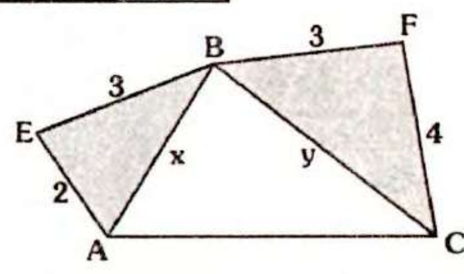
$$\Rightarrow m\sphericalangle DBC = \omega$$

- Luego: $\triangle DBC$ es isósceles

$$\therefore \mathbf{x = 5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 31



- Piden el mayor valor entero de: $x + y$
- Por existencia de triángulos

  En $\triangle AEB$: $x < 2 + 3 \Rightarrow x < 5$

  En $\triangle BFC$: $y < 3 + 4 \Rightarrow y < 7$

$$\Rightarrow x + y < 12$$

$$\therefore \mathbf{(x + y)_{\substack{máximo \\ entero}} = 11}$$

Clave C

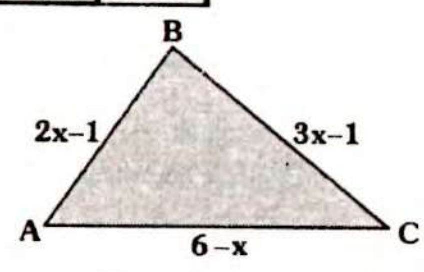


El estudiante debe notar que **x** *e* **y** *no necesariamente son enteros, pues nos piden la suma, la cual debe ser máxima y entera.*

Como $x < 5$ *e* $y < 7$, *es cierto que los máximos enteros de* **x** *e* **y** *por separado son 4 y 6 respectivamente, pero esto no piden.*

En este tipo de ejercicios, hay que analizar cual es la expresión que se busca.

RESOLUCIÓN Nº 32



- Piden: Perímetro$_{(\blacktriangle ABC)}$
- Dato: AB, BC y AC son enteros.
- Primero, las longitudes son positivas.

$6 - x > 0 \Rightarrow x < 6$ ... (I)

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ ... (II)

$3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ ... (III)

- De la primera expresión, se deduce que x es entero, ya que AC es entero.
- Por existencia:

$$(3x-1)-(2x-1) < 6-x < (3x-1)+(2x-1)$$

$$x < 6 - x < 5x - 2$$

- Analizando por separado:

$x < 6 - x \Rightarrow x < 3$ ... (IV)

$6 - x < 5x - 2 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$ ... (V)

- De las expresiones (I) al (V):

$$\frac{4}{3} < x < 3 \quad \text{... } (\alpha)$$

- Como se indica **x** es entero, el valor de x, deacuerdo a la última expresión es 2.

$$\Rightarrow AB = 2(2) - 1 = 3$$

$$BC = 3(2) - 1 = 5$$

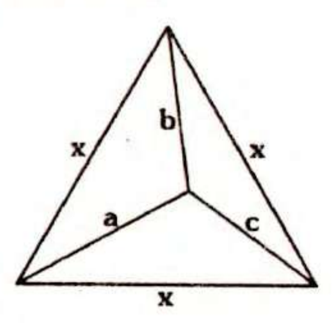
$$AC = 6 - (2) = 4$$

$$\Rightarrow \text{Perímetro}_{(\blacktriangle ABC)} = 3 + 4 + 5$$

$$\therefore \textbf{Perímetro}_{(\blacktriangle ABC)} = \mathbf{12}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 33



- Nos piden: x
- Dato: . x es entero
  . $a + b + c = 9$
- Por la observación del teorema 50:

$$\frac{3x}{2} < a + b + c < 2x$$

- Analizando por partes:

$\frac{3x}{2} < a + b + c$

$\frac{3x}{2} < 9 \Rightarrow x < 6$ ... (I)

$a + b + c < 2x$

$9 < 2x \Rightarrow x > 4{,}5$ ... (II)

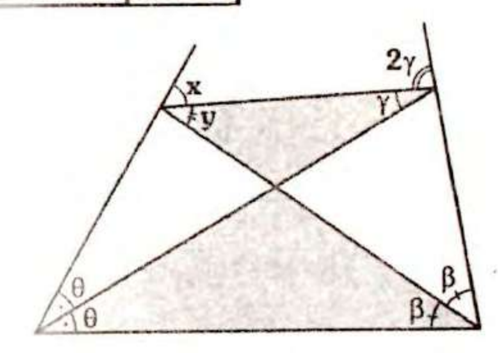
De (I) y (II):

$$4,5 < x < 6$$

$$\therefore\ \mathbf{x_{(entero)} = 5}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 34



Piden: $\frac{x}{y}$

En ⧖: $y + \gamma = \theta + \beta$

$$\Rightarrow\ y = \theta + \beta - \gamma$$

En ⌂: por teorema 8

$$x + 2\gamma = 2\theta + 2\beta$$

$$x = 2\theta + 2\beta - 2\gamma$$

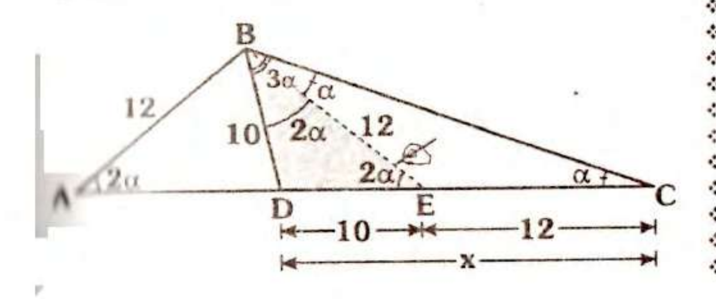
$$\Rightarrow\ x = 2(\theta + \beta - \gamma)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2(\theta + \beta - \gamma)}{(\theta + \beta - \gamma)}$$

$$\therefore\ \mathbf{\frac{x}{y} = 2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 35



- Piden: x
- Datos:

  AB = 12 , BD = 10 , m∢ACB = α ,
  m∢BAC = 2α y m∢DBC = 3α
- Se traza $\overline{BE}$, tal que m∢EBC = α

⇒ m∢DBE = 2α y por ángulo exterior en el ΔBEC : m∢BED = 2α

- Tenemos entonces: ΔEBD , ΔEBC y ΔABE son isósceles.

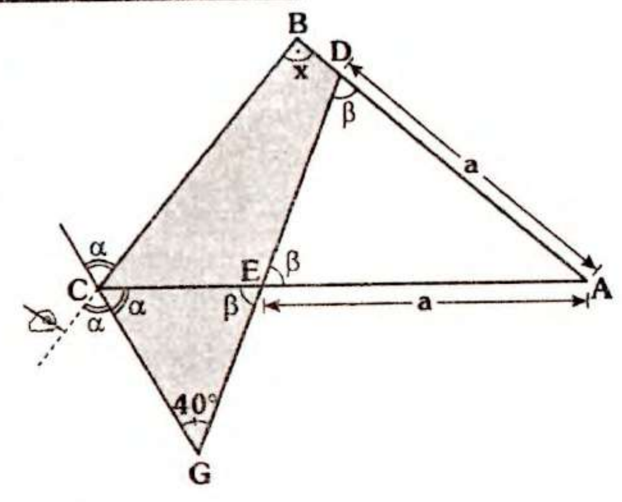
  ΔBDE : BD = DE = 10
  ΔABE : AB = BE = 12
  ΔEBC : EB = EC = 12

$$\Rightarrow\ x = 10 + 12$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 22}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 36



- Piden: x
- Dato: AE = AD
- ΔEDA isósceles

  ⇒ m∢DEA = m∢EDA = β
- En △, por teorema 6:

$$x + 40° = \alpha + \beta \qquad \dots (I)$$

- En ΔCGE:

$$\alpha + \beta + 40° = 180°$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 140° \quad \ldots (II)$$

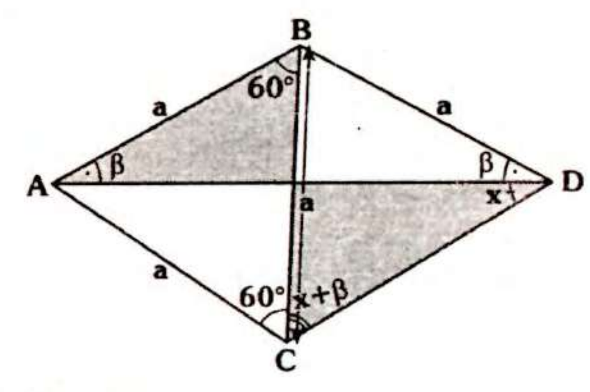
- Reemplazando (II) en (I):

$$x + 40° = 140°$$

$$\therefore \mathbf{x = 100°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 37



- Piden: x
- Dato: $AB = BC = AC = BD$

$\Rightarrow \Delta ABC$ es equilátero

ΔABD y ΔCBD : isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle BAD = m\measuredangle ADB = \beta$;

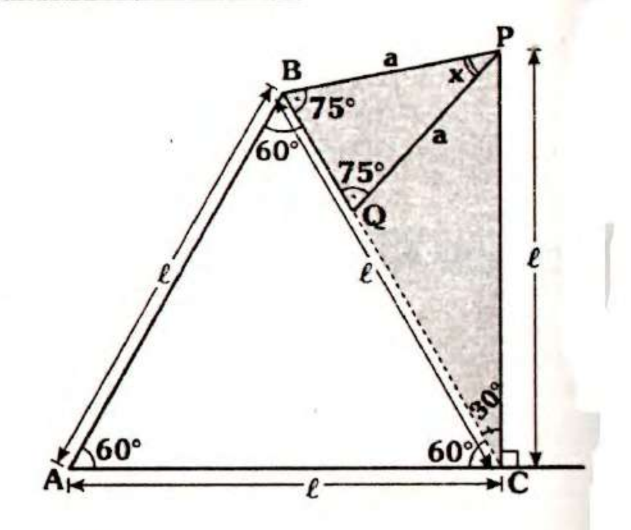
$m\measuredangle BCD = m\measuredangle BDC = \beta + x$

- En ⚡: $x + x + \cancel{\beta} = 60° + \cancel{\beta}$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 38



- Piden: x
- Dato: $AB = AC = PC$
- Como: $m\measuredangle BAC = 60°$ y $AB = AC$, el triángulo ABC es equilátero.
- Como $m\measuredangle ABQ = 60° \Rightarrow$ al prolongar $\overline{BQ}$ pasará por C.

$\Rightarrow BC = \ell$ y $m\measuredangle BCA = 60°$

$\Rightarrow m\measuredangle BCP = 30°$

- ΔBCP : isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle CBP = m\measuredangle BPC = 75°$

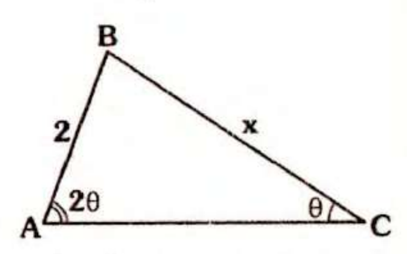
- ΔBPC : isósceles

$$75° + 75° + x = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 39

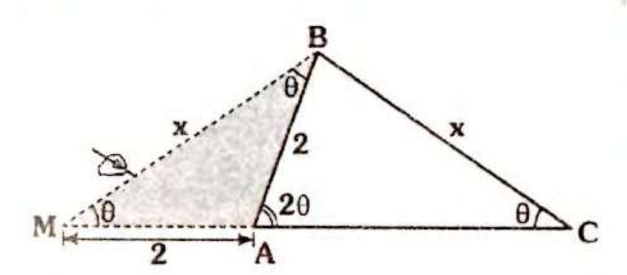


- Piden el valor entero de x.

- Como $m\measuredangle BAC > m\measuredangle BCA$, por teorema de la correspondencia.

$$x > 2 \quad \dots (I)$$

- Luego ; por lo expresado en página N° 37 (trazos auxiliares):



- Se prolonga $\overline{CA}$, tal que $m\measuredangle BMC = \theta$

$\Rightarrow \Delta MBC$ isósceles $\Rightarrow MB = x$

- En ΔMBA, por ángulo exterior :

$$m\measuredangle ABM = \theta$$

$\Rightarrow \Delta MBA$ isósceles $\Rightarrow MA = AB = 2$

- Por existencia:

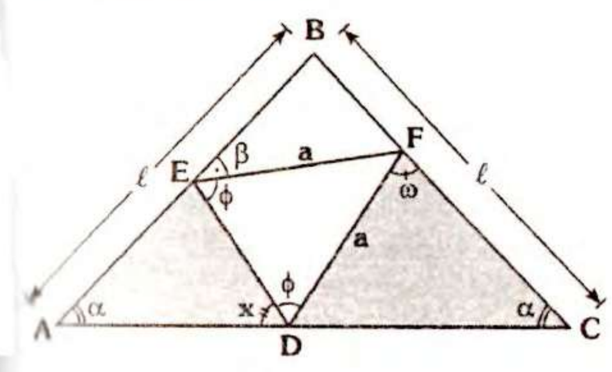
$$x < 2 + 2 \Rightarrow x < 4 \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II): $2 < x < 4$

$\therefore$ **El valor entero de x es 3.**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 40



- Piden: x
- Datos:

$DF = EF$; $AB = BC$ y $\beta + \omega = 78°$

$\Rightarrow \Delta ABC$ y $\Rightarrow \Delta DEF$ son isósceles

- Por ángulo exterior en:

$\Delta EAD: \; x + \alpha = \beta + \phi \quad \dots (I)$

$\Delta CFD: \; x + \phi = \alpha + \omega \quad \dots (II)$

- Sumando (I) y (II):

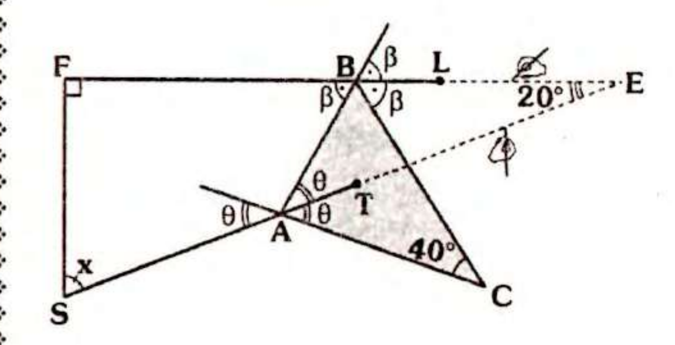
$$2x + \cancel{\alpha + \phi} = \beta + \cancel{\alpha + \theta} + \omega$$

$$2x = \underbrace{\beta + \omega}_{78°}$$

$\therefore$ $\mathbf{x = 39°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 41



- Nos piden: x
- Prolongamos $\overline{AT}$ y $\overline{BL}$, las cuales se cortarán en E.
- En el ΔBCA, por ángulo entre bisectrices (teorema 27):

$$m\measuredangle BEA = \frac{40°}{2} = 20°$$

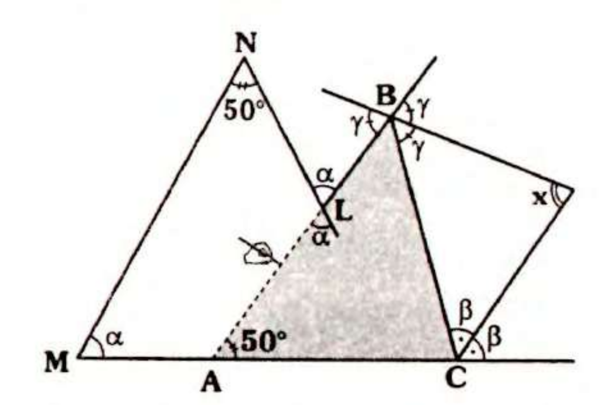
- En ◺SFE:

$$x + 20° = 90°$$

$\therefore$ $\mathbf{x = 70°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 42



- Nos piden: x
- En ⏢(MNLA), por teorema 8

$$m\sphericalangle LAC + \alpha = 50° + \alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle LAC = 50°$$

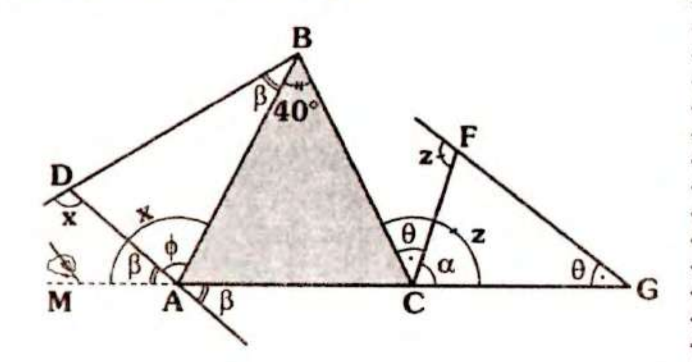
- En ΔABC, por ángulo entre bisectrices (teorema 26)

$$x = 90° - \frac{50°}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = 65°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 43



- Piden: $x + z$
- Por ángulo exterior, en:

$$\Delta BAD : x = \beta + \phi$$

$$\Delta CFG : z = \alpha + \theta$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle MAB = \beta + \phi = x$$

$$m\sphericalangle BCG = \alpha + \theta = z$$

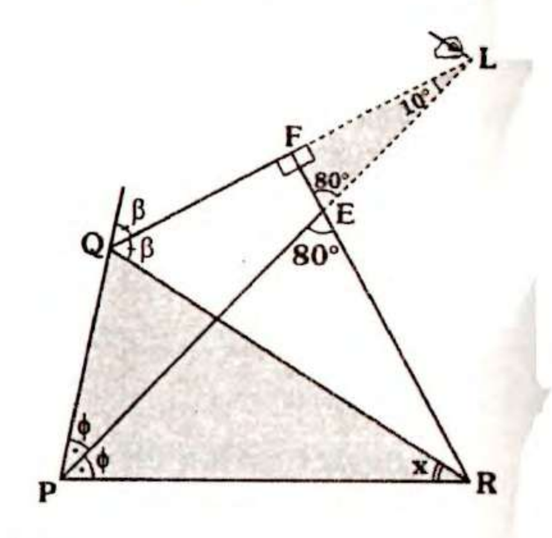
- En ΔBAC, por teorema 7:

$$x + z = 180° + 40°$$

$$\therefore \mathbf{x + z = 220°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 44



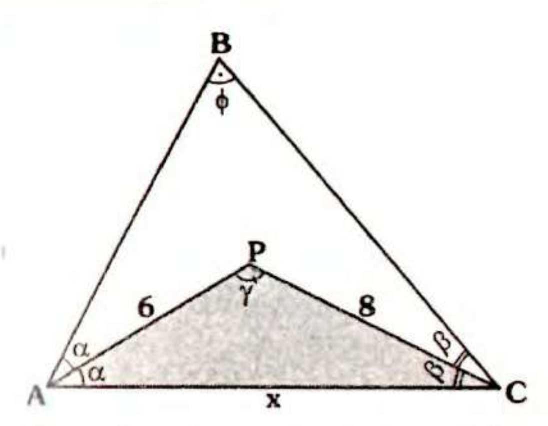
- Piden: x
- Prolongamos $\overline{QF}$ y $\overline{PE}$, las cuales se cortan en L.
- En ◺EFL: $m\sphericalangle FLE = 10°$
- En ΔRPQ, por ángulo entre bisectrices (teorema 27).

$$10° = \frac{x}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 45



- Nos piden la cantidad de valores enteros de x.
- Por teorema 25:

$$\gamma = 90° + \frac{\phi}{2} \Rightarrow \gamma > 90°$$

- Luego el triángulo APC es obtusángulo.
- En ΔAPC como $\gamma > 90°$, $\overline{AC}$ es el lado de mayor longitud:

$$\Rightarrow \quad x > 8 \qquad \ldots (I)$$

- Por existencia:

$$8 - 6 < x < 8 + 6$$

$$2 < x < 14 \qquad \ldots (II)$$

- Como $\gamma > 90°$, por teorema 21:

$$x^2 > 6^2 + 8^2$$

$$\Rightarrow x > 10 \qquad \ldots (III)$$

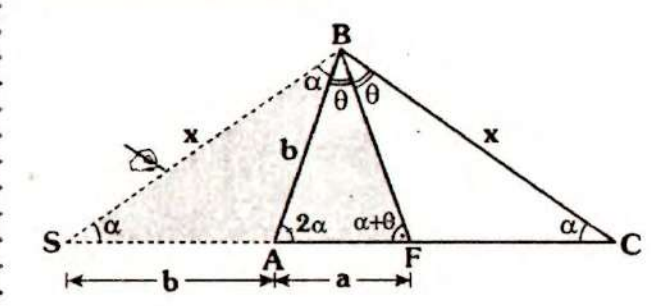
- De (I), (II) y (III):

$$10 < x < 14$$

- Luego, los valores enteros de **x**, son: **11**, **12** y **13**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 46



- Piden: x
- Como $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BCA)$, por el criterio indicado en la página 37 (trazos auxiliares):
- Se prolonga $\overline{CA}$, tal que $m\sphericalangle BSF = \alpha$
- Luego: $m\sphericalangle SBA = \alpha \Rightarrow \Delta SAB$ y ΔSBC son isósceles.

$$\Rightarrow AB = AS = b \;\text{ y }\; SB = BC = x$$

- En ΔBFC, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle BFA = \alpha + \theta$$

- Se tendrá entonces:

$$m\sphericalangle SBF = m\sphericalangle BFA = \alpha + \theta$$

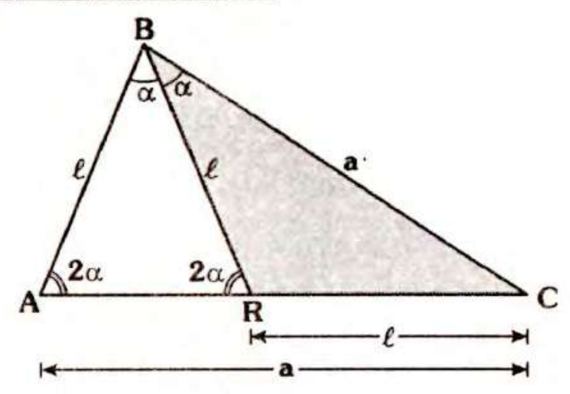
- ΔSBF es isósceles

$$\Rightarrow SB = SF$$

$$\therefore\ \mathbf{x = a + b}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 47



- Piden: $m\sphericalangle BCA$

- Dato: $AC = BC$ y $AB = BR$.

$\Rightarrow \Delta ABC$ y ΔABR son isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle CBA = m\sphericalangle BAC = 2\alpha$

$m\sphericalangle BAR = m\sphericalangle ARB = 2\alpha$

- En ΔBRC: por ángulo exterior

$$m\sphericalangle BCA + \alpha = 2\alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BCA = \alpha$$

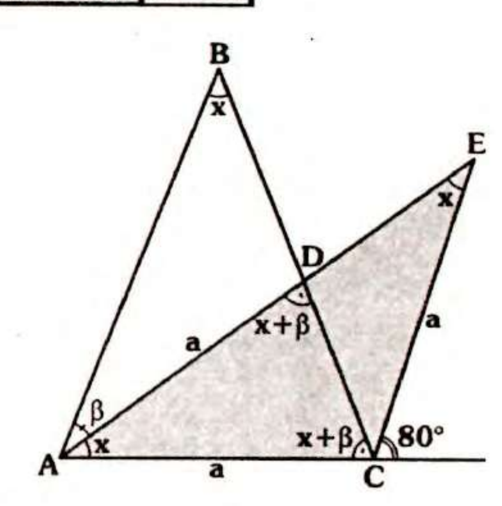
- En ΔABR:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\alpha = 36°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 48



- Piden: x
- Dato: $AB = BC$ y $AD = CE$

$\Rightarrow \Delta ABC$: isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB = x + \beta$

- Por ángulo exterior, en ΔABD:

$$m\sphericalangle ADC = x + \beta$$

$\Rightarrow \Delta ADC$ es isósceles $\Rightarrow AD = AC = a$

- Como $AC = CE = a \Rightarrow \Delta ACE$ es isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle CAE = m\sphericalangle AEC = x$

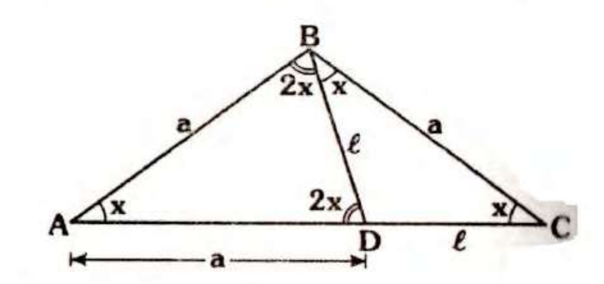
- Por ángulo exterior, en ΔAEC:

$$x + x = 80°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 40°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 49



- Piden: x
- Dato: $AD = BC$; $BD = DC$ y

$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle DBC$

- ΔBDC: isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle DBC = m\sphericalangle DCB = x$

- ΔABC: isósceles $\Rightarrow AB = BC = a$
- ΔABD isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ADB = 2x$

- En ΔABD:

$$2x + 2x + x = 180°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 36°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 50

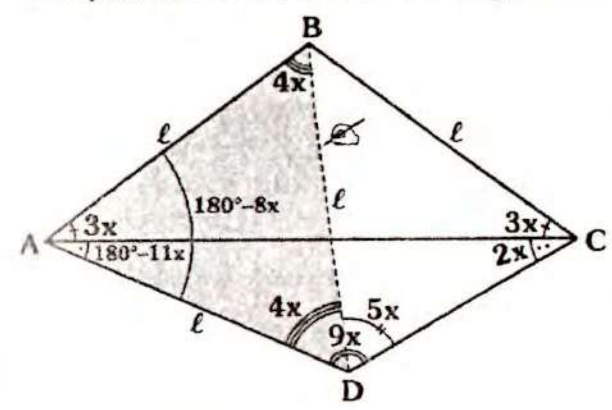
- Del dato:

$$m\sphericalangle ADC = 3(m\sphericalangle BAC) = 9x$$

$\Rightarrow m\sphericalangle ADC = 9x$ y

$m\sphericalangle BAC = 3x$

- Ubiquemos estos datos en el gráfico:



- Se nos pide: x
- También es dato: AB = BC = AD

$\Rightarrow$ ΔABC : isósceles

- En ΔADC : m∢DAC = 180° – 11x

$\Rightarrow$ m∢BAD = 180° – 8x y AB = AD

$\Rightarrow$ ΔBAD : m∢ABD = m∢ADB = 4x

$\Rightarrow$ m∢BDC = 5x

- Luego el ΔDBC es isósceles :

DB = BC = ℓ

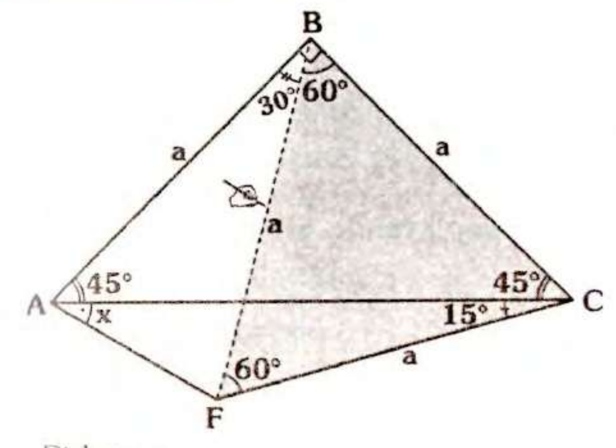
- Como: AB = AD = BD = ℓ $\Rightarrow$ el triángulo ABD es equilátero

$\Rightarrow$ $4x = 60°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 15°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 51



- Piden: x

- Del dato:

BC = CF = a y m∢ACF = 15°

$\Rightarrow$ m∢BCF = 60° $\Rightarrow$ ΔBFC equilátero

- Luego: AB = BF = a y

m∢ABF = 30°

- ΔABF isósceles :

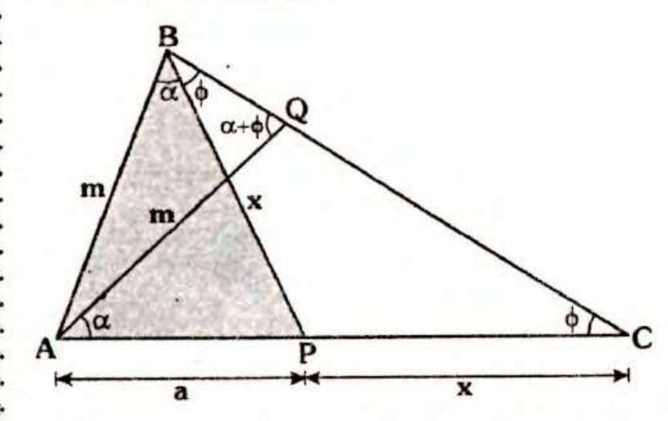
m∢BAF = m∢AFB = 75°

$\Rightarrow$ $45° + x = 75°$

$\therefore$ $\mathbf{x = 30°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 52



- Nos piden el menor valor entero de x en función de m.
- Dato: BP = PC y AB = AQ = m , donde m es par.
- Se tendrá entonces:

ΔBQA y ΔBPC isósceles

$\Rightarrow$ m∢PBC = m∢PCB = ϕ

- Por ∢ exterior en ΔAQC :

m∢AQB = α + ϕ

ΔABQ : m∢QBA = α + ϕ

$\Rightarrow$ m∢ABP = α

- Como m∢BAP > m∢ABP, por t. de la correpondencia, en ΔABP :

$x > a$ ... (I)

- Por existencia:

$$m < a + x \quad \ldots (II)$$

- De (I): $a < x$
- Sumando $m + a < a + 2x$

$$\Rightarrow m < 2x$$

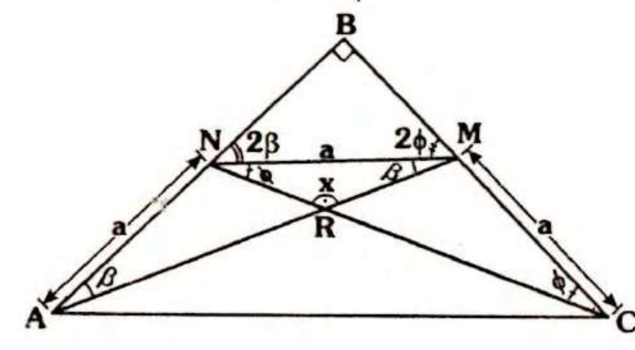
$$\Rightarrow \frac{m}{2} < x$$

- Como es par $\Rightarrow \frac{m}{2} \in \mathbb{Z}^+$

$$\therefore \mathbf{x_{(menor\ entero)}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}} + \mathbf{1}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 53



- Piden: x
- Dato: $AN = NM = MC \Rightarrow \Delta ANM$ y ΔNMC : isósceles
- ΔNRM : $x + \beta + \phi = 180°$ ... (I)
- ⊿NBM: $2\beta + 2\phi = 90°$

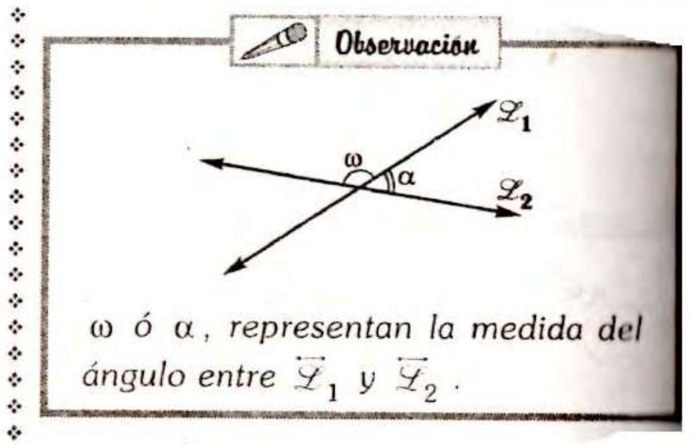
$$\Rightarrow \beta + \phi = 45°$$

- En (I):

$$x + 45° = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 135°}$$

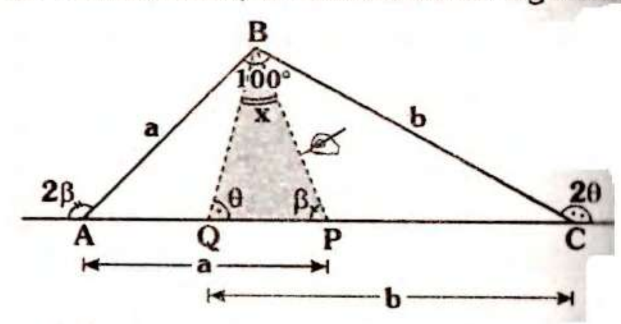
Clave C



ω ó α, representan la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$.

RESOLUCIÓN Nº 54

En este ejercicio, los puntos P y Q están en $\overline{AC}$, pero no indican el orden, dada las condiciones, se obtendrá lo siguiente:



- Piden: x
- Dato: $AB = AP$; $CA = CQ$ y

$$m\measuredangle ABC = 100°$$

$$\Rightarrow \Delta ABP \text{ y } \Delta QBC \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle ABP = m\measuredangle APB = \beta$$

$$m\measuredangle QBC = m\measuredangle BQC = \theta$$

- En ΔQBP : $x + \theta + \beta = 180°$ ... (I)
- En ΔABC : por teorema 7

$$2\theta + 2\beta = 180° + 100°$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = 140°$$

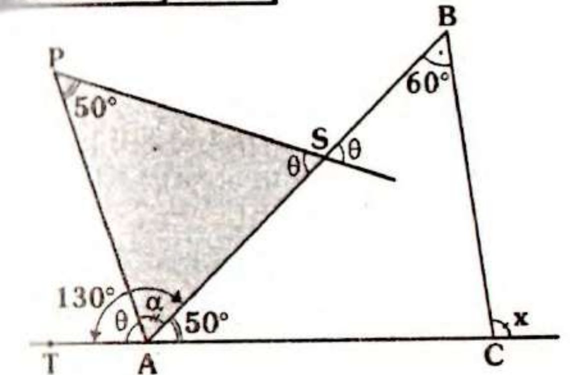
- Reemplazando en (I):

$$x + 140° = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 40°}$$

Clave E

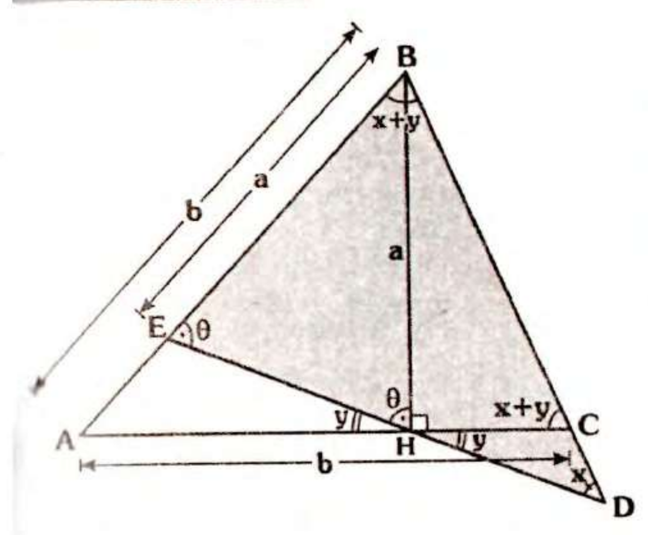
RESOLUCIÓN Nº 55



- Piden: x
- En ΔAPS: $\alpha + \theta + 50° = 180°$
  $\Rightarrow \alpha + \theta = 130°$
  $\Rightarrow m\measuredangle TAS = \alpha + \theta = 130°$
  $\Rightarrow m\measuredangle BAC = 50°$
- En ΔABC por ángulo exterior:
  $x = 50° + 60°$
  $\therefore$ $\mathbf{x = 110°}$

Clave C

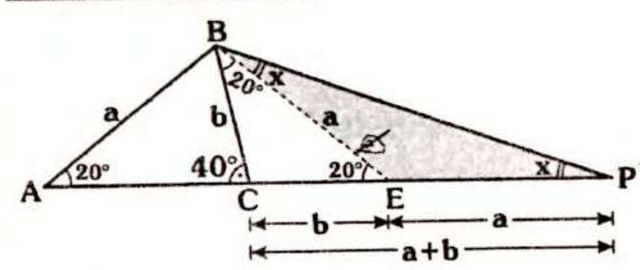
RESOLUCIÓN Nº 56



- Piden: x
- Dato: $AB=AC$ y $EB=BH=a$
  $\Rightarrow$ ΔABC y ΔEBC son isósceles
- Sea $m\measuredangle CHD = y \Rightarrow m\measuredangle ACB = x + y$
  $\Rightarrow m\measuredangle ABC = x + y$
- También: $m\measuredangle BEH = m\measuredangle BHE = \theta$
- En ΔEBD:
  $x + x + y + \theta = 180°$
  $\Rightarrow 2x + y + \theta = 180°$ ... (I)
- Como: $m\measuredangle AHB = 90°$
  $\Rightarrow \theta + y = 90°$
- En (I): $2x + 90° = 180°$
  $\therefore$ $\mathbf{x = 45°}$

Clave B

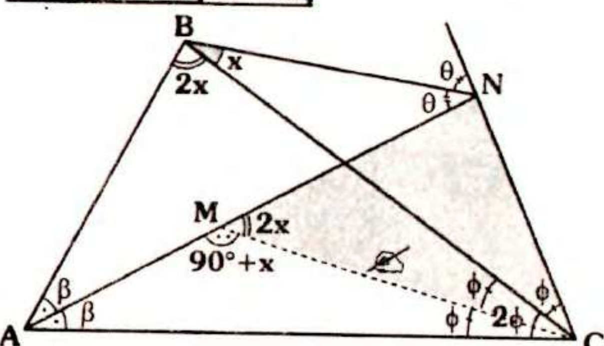
RESOLUCIÓN Nº 57



- Piden: x
- Por dato: $CP = AB + BC$
- Ubicamos E en $\overline{CP}$ tal que $CE=b$
  $\Rightarrow \Delta CEB$: isósceles $(CB = CE)$
  $\Rightarrow m\measuredangle CBE = m\measuredangle CEB = 20°$
- Se tendrá ahora: ΔABE es isósceles
  $\Rightarrow AB = BE = a$
- En ΔEBP: isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle EBP = m\measuredangle EPB = x$
- Por ángulo exterior:
  $x + x = 20°$
  $\therefore$ $\mathbf{x = 10°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 58



- Piden: x
- Como $m\sphericalangle ACB = 2\phi$, se traza $\overline{CM}$ tal que : $m\sphericalangle ACM = m\sphericalangle BCM = \phi$
- En ΔCMN, por teorema 27 (ángulo entre bisectrices).

$$m\sphericalangle CBN = \frac{m\sphericalangle CMN}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{m\sphericalangle CMN}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle CMN = 2x$$

- Por teorema 25, en ΔABC :

$$m\sphericalangle AMC = 90° + \frac{m\sphericalangle ABC}{2}$$

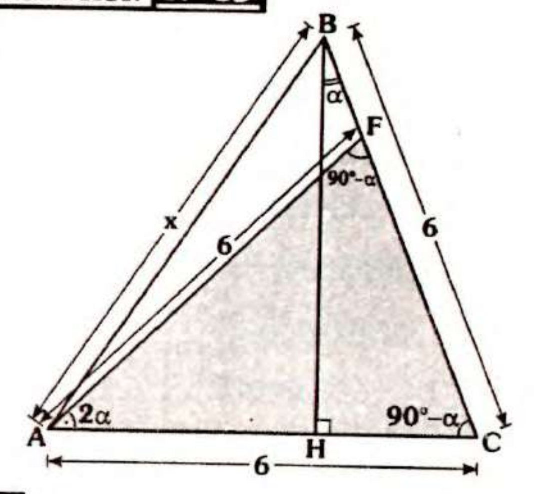
$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle AMC = 90° + x$$

- Finalmente: $90° + x + 2x = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 59



- Piden: $x_{(\text{máximo entero})}$
- Dato: $AF = BC = 6$

$$m\sphericalangle FAC = 2(m\sphericalangle HBC)$$

- En $\triangle HBC$: $m\sphericalangle BCH = 90° - \alpha$
- En ΔAFC :

$m\sphericalangle FAC = 2\alpha \quad y \quad m\sphericalangle ACF = 90° - \alpha$

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle AFC = 90° - \alpha$$

$\Rightarrow \ \Delta AFC$: isósceles $\Rightarrow AF = AC = 6$

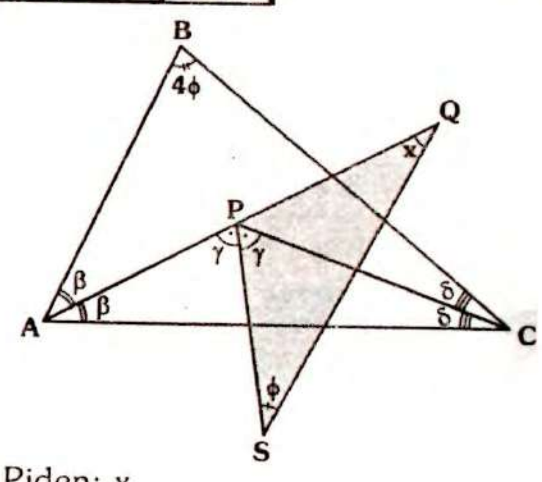
- En ΔABC, por existencia:

$$x < 6 + 6 \Rightarrow x < 12$$

$$\therefore \ \mathbf{x_{(\text{máximo entero})} = 11}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 60



- Piden: x
- Por ángulo entre bisectrices (teorema 25), en ΔABC :

$$m\sphericalangle APC = 90° + \frac{4\phi}{2}$$

$$2\gamma = 90° + 2\phi$$

$$\Rightarrow \ \gamma = 45° + \phi$$

- En ΔSQP, por ángulo exterior

$$x + \phi = \gamma$$

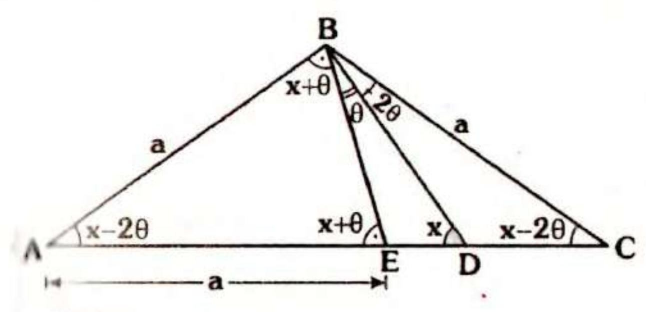
$$\Rightarrow x + \phi = 45° + \phi$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 45°}$$

Clave D

Solucionario
Ciclo Cepre-Uni

RESOLUCIÓN Nº 61



- Piden: x
- Por ángulo exterior:

$$m\measuredangle BCD = x - 2\theta$$

- $\triangle ABC$: isósceles

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA = x - 2\theta$$

- $\triangle BDE$, por ángulo exterior:

$$m\measuredangle BEA = x + \theta$$

- $\triangle ABE$: isósceles

$$m\measuredangle ABE = x + \theta$$

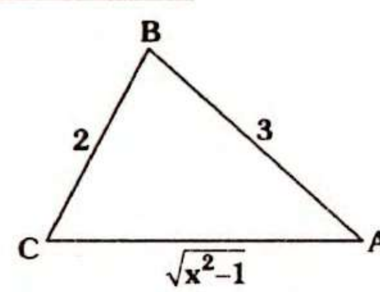
$$x - 2\theta + x + \theta + x + \theta = 180°$$

$$\Rightarrow 3x = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 62



- Nos piden la cantidad de valores enteros para x.
- Se trata de un problema algebraico, analicemos todas las restricciones

Parte I

- En: $\sqrt{x^2-1} \Rightarrow x^2 - 1 > 0$

$$x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle \qquad \text{... (I)}$$

- También aquí, esta contenido, la condición: $AC > 0$.
- Pues AC es longitud de un lado.

Parte II

- Por existencia:

$$3 - 2 < \sqrt{x^2-1} < 3 + 2$$

$$1 < \sqrt{x^2-1} < 5$$

- Resolviendo por partes:

$$\sqrt{x^2-1} < 5 \Rightarrow x^2 - 1 < 25$$

$$x^2 < 26$$

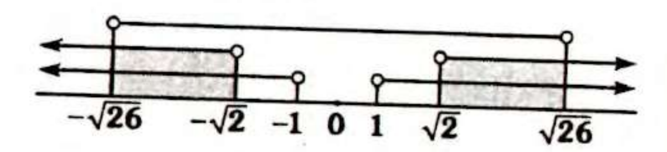
$$\Rightarrow \quad x \in \langle -\sqrt{26}; \sqrt{26} \rangle \quad \text{... (II)}$$

$$1 < \sqrt{x^2-1} \Rightarrow 1 < x^2 - 1$$

$$2 < x^2$$

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; \infty \rangle \quad \text{... (III)}$$

- De (I), (II)y (III):



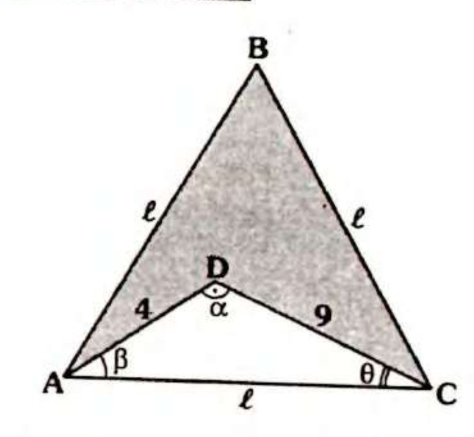
C.S. $x \in \langle -\sqrt{26}; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; \sqrt{26} \rangle$

- Como x , debe ser entero por condición, los valores de x son:

$\{-5; -4; -3; -2; 2; 3; 4; 5\}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 63



- Piden el menor valor entero del perímetro de ABCD

$\text{Perím}_{(\ ABCD)} = 2\ell + 4 + 9 = 2\ell + 13$

"Lo que debe ser entero es el perímetro como se indicó en el problema 31, ℓ, no es necesariamente entero"

- Por dato: $\ell + \ell + \ell > 33$

$\ell > 11$ ... (I)

- Analicemos mas restricciones.
- En ΔADC , por existencia

$9 - 4 < \ell < 9 + 4$

$5 < \ell < 13$ ... (II)

- Como $\alpha > \theta$ y $\alpha > \beta$ (pues $\alpha > 60°$, $\theta < 60°$ y $\beta < 60°$)

$\ell > 9$, $\ell > 4 \Rightarrow \ell > 9$ ... (III)

- En ◬ABCD, por teorema 41

$\ell + \ell > 4 + 9 \Rightarrow \ell > 6{,}5$ ... (IV)

- De (I), (II) (III) y (IV):

$11 < \ell < 13$

- Formando, la expresión que se nos pide: $(2\ell + 13)$

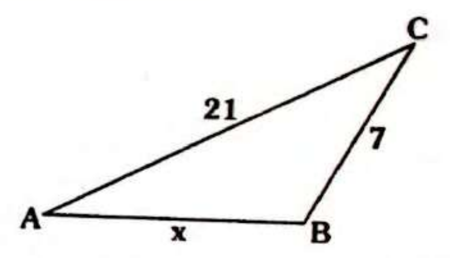
$\Rightarrow 35 < \underbrace{2\ell + 13} < 39$

$35 < \text{perím}_{(◬ABCD)} < 39$

- Por lo tanto el menor valor del perímetro es 36.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 64



- Nos piden el mayor valor entero de $(2x - 3)$
- Sea: $E = 2x - 3$ ... (I)
- Por existencia:

$21 - 7 < x < 21 + 7$

$14 < x < 28$

- Formando la expresión (I).
- Multiplicando 2:

$14(2) < 2x < (28)2$

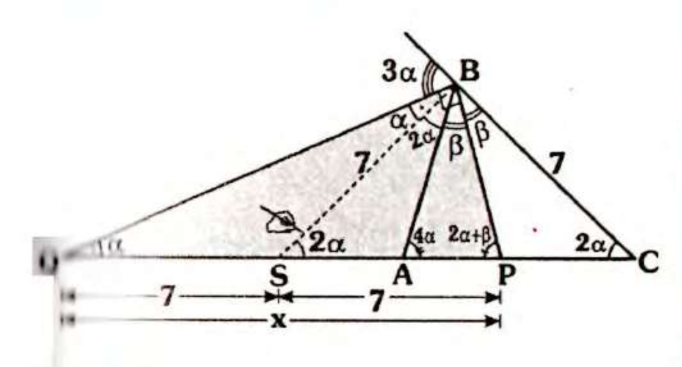
- Restando: 3

$$28-3<\underbrace{2x-3}<56-3$$
$$25<\quad E \quad<53$$

$\therefore\ E_{(\text{máximo entero})} = \mathbf{52}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 65



- Piden x
- Sea $m\measuredangle BAC = 4\alpha \Rightarrow m\measuredangle BCA = 2\alpha$ *(dato)*
- Como $\overline{BQ}$ y $\overline{BP}$ son bisectrices:

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle QBP = 90^\circ$$

- Se tendrá entonces:

$$m\measuredangle BQC = \alpha$$

- Se traza $\overline{BS}$ tal que:

$$m\measuredangle QBC = \alpha$$

- Luego:

$\triangle SBC$: isósceles $\Rightarrow SB = 7$

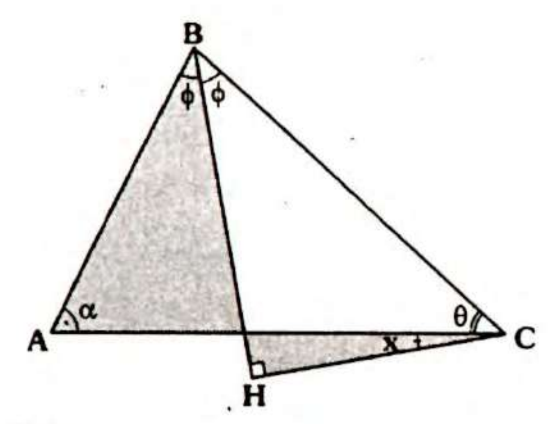
$\triangle QSB$: isósceles $\Rightarrow BS = SQ = 7$

$\triangle SBP$: isósceles $\Rightarrow SB = SP = 7$

$\therefore\ \mathbf{x = 14}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 66

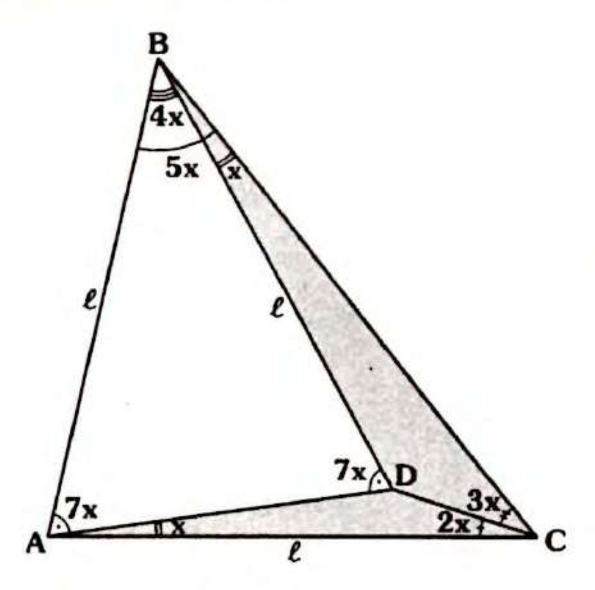


- Piden: x
- Dato: $\alpha - \theta = 20^\circ$
- En ∟: $x + 90^\circ = \alpha + \phi$ ... (I)
- En ◺BHC: $x + \theta + \phi = 90^\circ$ ... (II)
- Sumando (I) y (II):

$$2x + \phi + \theta + 90^\circ = 90^\circ + \alpha + \phi$$
$$\Rightarrow \ 2x = \underbrace{\alpha - \theta}_{20^\circ}$$
$$\therefore\ \mathbf{x = 10^\circ}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 67



- Piden: $m\measuredangle ABD$

- En $\measuredangle$ADBC:

$$m\sphericalangle ADB = x + 5x + x = 7x$$

$\Rightarrow \Delta ABD$ es isósceles $\Rightarrow AB = AD = \ell$

ΔABC es isósceles, pues $AB = AC$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ABC = 5x$$

- En ΔABC: $5x + 5x + 8x = 180°$

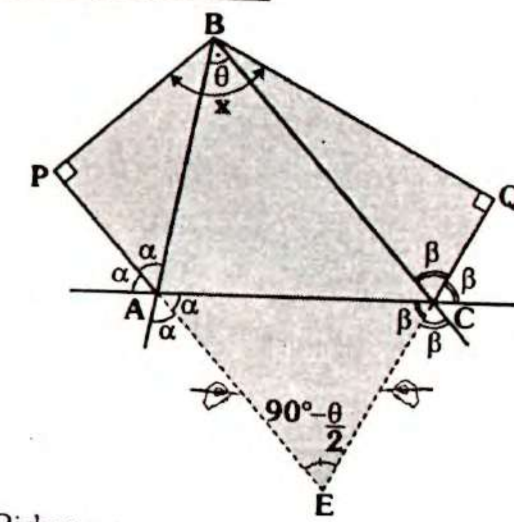
$$\Rightarrow x = 10°$$

- Como nos piden $m\sphericalangle ABD$:

$$\Rightarrow \mathbf{m\sphericalangle ABD = 4x = 40°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 68



- Piden: x
- Se prolonga $\overline{PA}$ y $\overline{QC}$ tal que se cortan en E.
- En ΔABC, por teorema 26:

$$m\sphericalangle AEC = \frac{90° - \theta}{2}$$

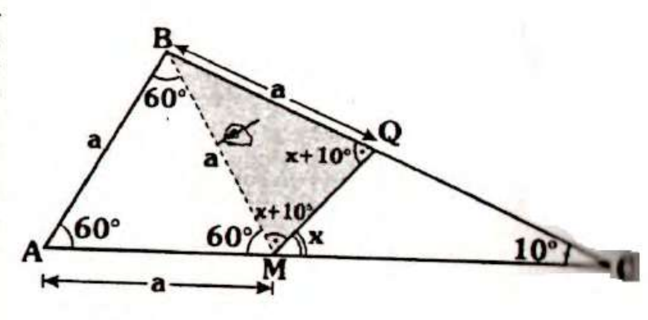
- En ⌂PBQE, por corolario 1 del teorema 6:

$$x + 90° - \frac{\theta}{2} = 180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 90° + \frac{\theta}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 69



- Piden x
- De los datos $AB = AM = BQ$ y como $m\sphericalangle BAC = 60° \Rightarrow$ al trazar $\overline{BM}$, el ΔABM resulta ser equilátero $\Rightarrow BM = a$ y $m\sphericalangle AMB = 60°$
- También: ΔMBQ : isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle BMQ = m\sphericalangle MQB = x + 10°$$

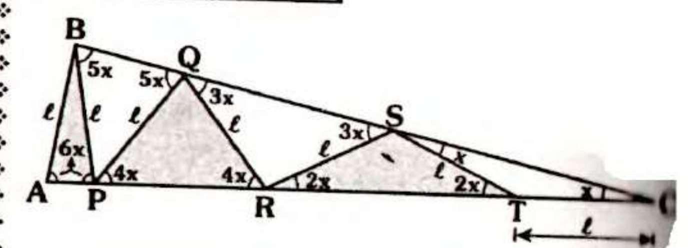
- Finalmente:

$$60° + x + 10° + x = 180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 55°}$$

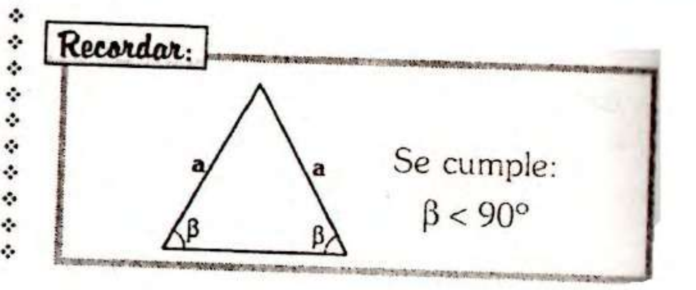
Clave D

RESOLUCIÓN Nº 70



- Piden el mayor valor entero de x.
- De los datos se tiene: ΔABP, ΔBPQ, ΔPQR, ΔQRS, ΔSTR y ΔSTC : son isósceles

Recordar:



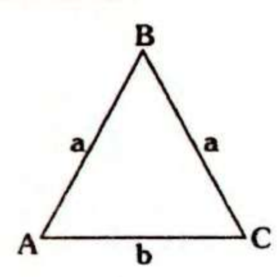
Se podría plantear ello en cada triángulo isósceles, pero la expresión que contiene a todas las restricciones, está en el $\triangle ABP$:

$$6x < 90° \Rightarrow x < 15°$$

$$\therefore\ x_{(\text{máximo entero})} = 14°$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 71



Por dato: a y $b \in \mathbb{Z}^+$

$$\underbrace{2a + b}_{\text{perímetro}(2p)} = 18 \Rightarrow p = 9$$

Nos piden la cantidad de triángulos con esa característica.
Por corolario del teorema 15 de existencia:

$$a < p \Rightarrow a < 9 \quad \dots \text{(I)}$$

$$b < p \Rightarrow b < 9 \quad \dots \text{(II)}$$

También:

$$b < 2a \Rightarrow b + 2a < 2a + 2a$$

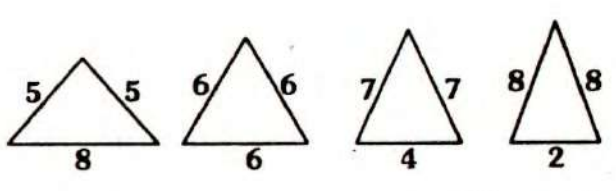
$$18 < 4a$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} < a \quad \dots \text{(III)}$$

De (I) y (III): $\dfrac{9}{2} < a < 9$

Los valores enteros de a, son : 5, 6, 7, 8 para cada valor de a, se obtiene un valor de b, pues el perímetro es 18.

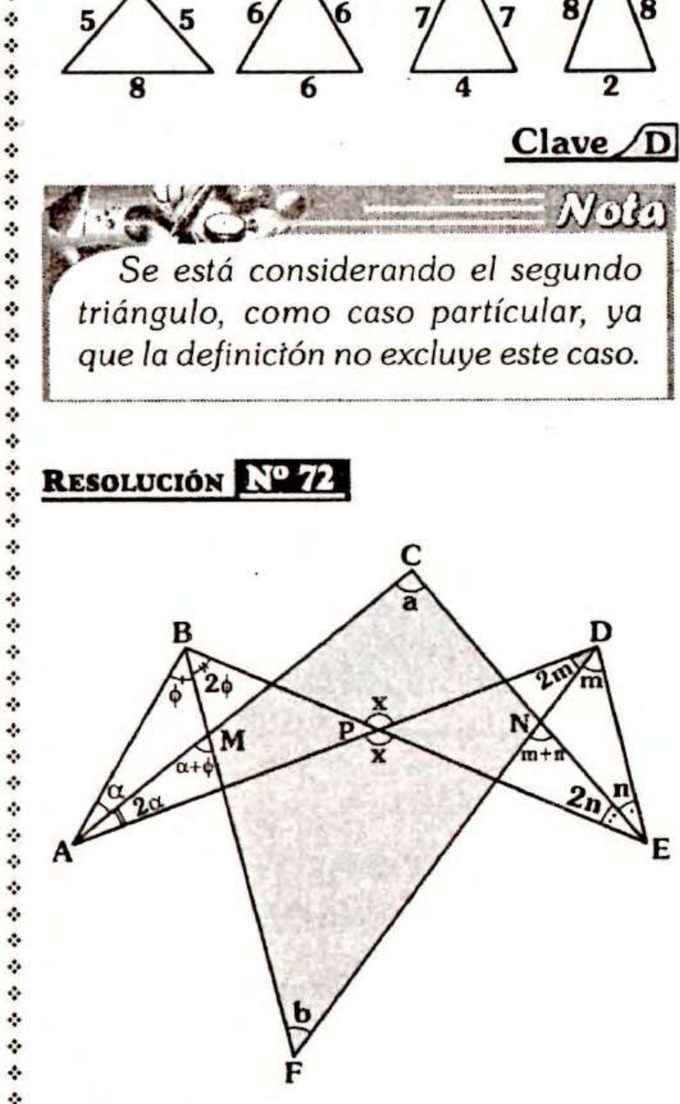
- Asi tenemos, los triángulos:



Clave D

> **Nota**
> *Se está considerando el segundo triángulo, como caso partícular, ya que la definictón no excluye este caso.*

RESOLUCIÓN Nº 72



- Pide: x
- Dato: $a + b = \omega$
- Por teorema 4, en:
- $\triangle ACEP$: $x = a + 2\alpha + 2n \quad \dots \text{(I)}$
- $\nabla BFDP$: $x = b + 2\phi + 2m \quad \dots \text{(II)}$
- Sumando (I) y (II):

$$2x = a + b + 2(\alpha + \phi + m + n) \quad \dots \text{(III)}$$

- En $\triangle MCNF$, por teorema 6:

$$\alpha + \phi + m + n = a + b \quad \dots \text{(IV)}$$

- En (III):

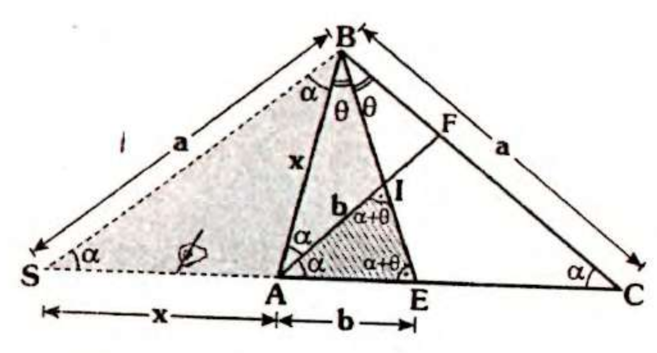
$$2x = a + b + 2(a + b)$$

$$\Rightarrow 2x = 3(\underbrace{a + b}_{\omega})$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{3}{2}\omega}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 73



- Se nos pide x.
- Por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle AIE = m\sphericalangle IEA = \alpha + \theta$$

$$\Rightarrow \Delta EIA \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow AI = AE = b$$

- Se prolonga $\overline{CA}$ y se traza $\overline{BS}$, tal que :

$$m\sphericalangle ABS = \alpha \Rightarrow m\sphericalangle BSA = \alpha$$

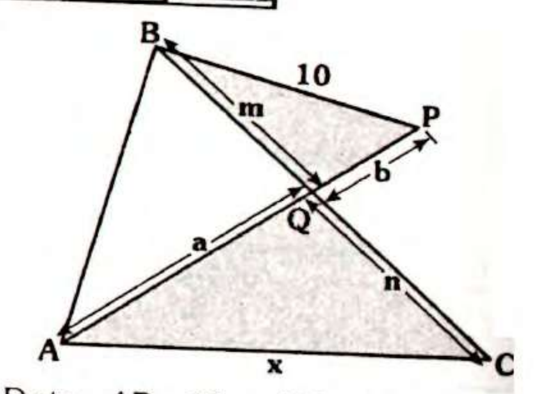
- ΔSBC : isósceles $\Rightarrow SB = BC = a$
- ΔABE : isósceles $\Rightarrow SE = SB$

$$x + b = a$$

$$\therefore\ \mathbf{x = a - b}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 74



- Dato: $AP = 11$ y $BC = 13$
- Es decir $a + b = 11$ y $m + n = 13$
- Por existencia en:

$$\Delta AQC:\ x < a + n \quad \text{... (I)}$$

$$\Delta BQP:\ 10 < b + m \quad \text{... (II)}$$

- Sumando (I) y (II):

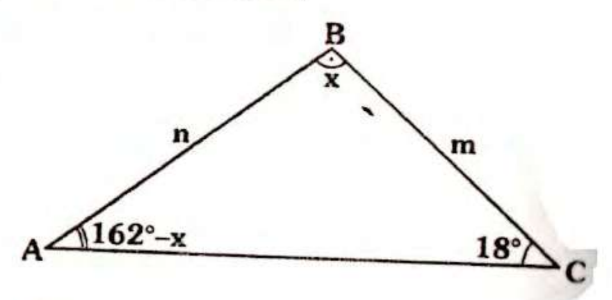
$$x + 10 < \underbrace{a + b}_{11} + \underbrace{m + n}_{13}$$

$$\Rightarrow x < 14$$

$$\therefore\ \mathbf{x_{(máximo\ entero)} = 13}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 75



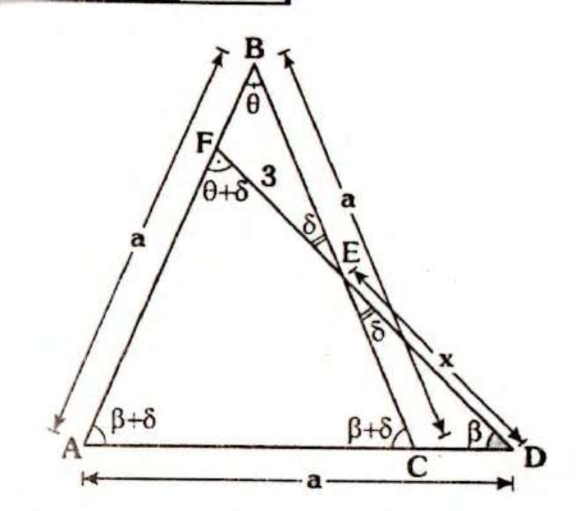
- Piden: $x_{(mínimo\ entero)}$
- Dato: $n > m$
- Por teorema de la correspondencia.

$$18° > 162° - x \Rightarrow x > 144°$$

$$\therefore\ x_{(mínimo\ entero)} = 145°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 76



- Se nos pide el mínimo valor entero de x.
- Dato: "a" es entero y $\beta > \theta$
- Como $\beta < \theta \Rightarrow \beta + \delta > \theta + \delta$
- En ΔAFD, por teorema de la correspondencia:

$$x + 3 > a \;\Rightarrow\; x > a - 3$$

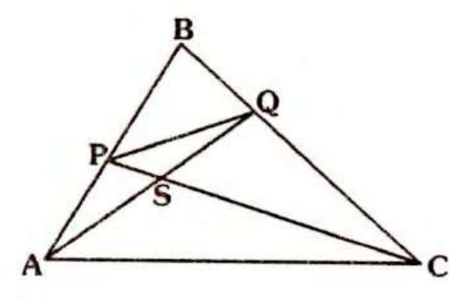
$$\therefore\; \mathbf{x_{(mínimo\ entero)} = a - 2}$$

Clave B

Nota

La condición para "a" es que sea mayor que 3.

RESOLUCIÓN Nº 77



De acuerdo a las alternativas, nos piden la relación entre PQ, AC, AQ y PC.

- Por existencia en:

$\Delta PSQ:\; PQ < PS + SQ$

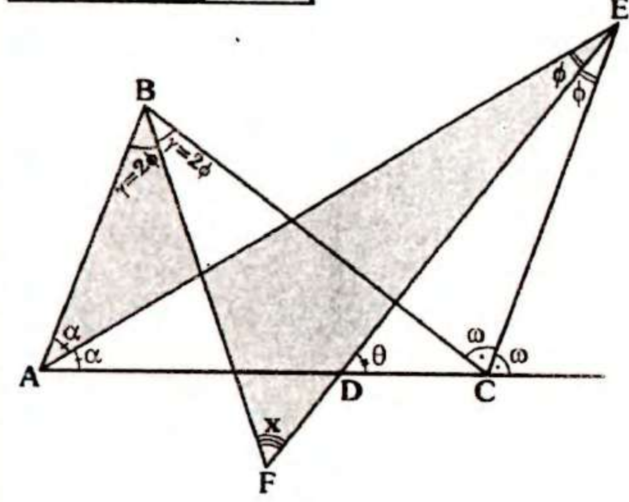
$\Delta ASC:\; AC < SC + AS$

$\Rightarrow PQ + AC < (PS + SC) + (AS + SQ)$

$$\therefore\; \mathbf{PQ + AC < PC + AQ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 78



- Piden x en función de θ.
- Por ángulo entre bisectrices, para el ΔABC (teorema 27).

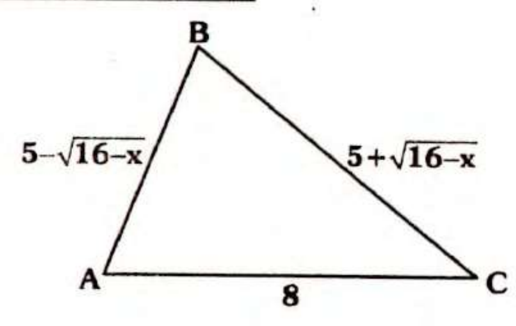
$$2\phi = \frac{(2\gamma)}{2} \Rightarrow \gamma = 2\phi$$

- En $\Delta ADE:\; \theta = \alpha + \phi$
- En ⋈: $x + \theta = \alpha + 2\phi \Rightarrow x = \alpha + \phi$

$$\therefore\; \mathbf{x = \theta}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 79



- Nos piden la suma de todos los valores enteros de x.
- Analicemos todas las restricciones:
- En $\sqrt{16-x}$

$$\Rightarrow 16-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 16 \quad \ldots (I)$$

- Cada lado tiene longitud positivo AC y BC ya lo son, garanticemos para AB:

$$5-\sqrt{16-x}>0$$

$$\Rightarrow 5>\sqrt{16-x} \Rightarrow x+9>0$$

$$x>-9 \quad \ldots (II)$$

- En ΔABC, se tiene $BC>AB$; por existencia:

$$BC-AB<8<BC+AB$$

$$2\sqrt{16-x}<8<10$$

- Analicemos solo: $2\sqrt{16-x}<8$; ya que $8<10$, siempre se cumple:

$$2\sqrt{16-x}<8$$

$$\Rightarrow x>0 \quad \ldots (III)$$

- De (I), (II) y (III):

$$0<x\leq 16$$

- Los valores que puede tomar x, son:

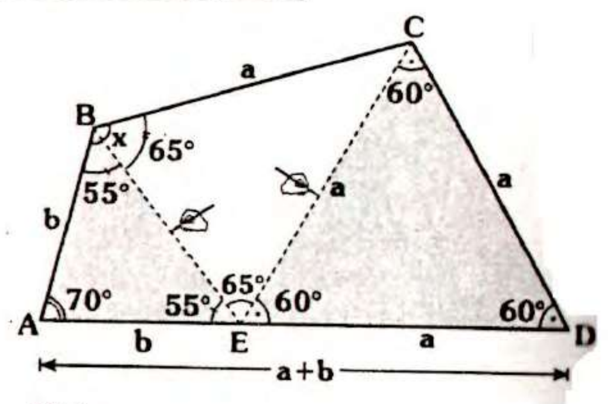
$$1,2,3,\ldots 15 \text{ y } 16$$

- Como nos piden la suma, por teorema:

$$\mathbf{S=\frac{(1+16)(16)}{2}=136}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 80



- Piden x:
- Dato: $AD=AB+BC$ y $BC=CD$
- Ubicamos E en $\overline{AD}$ tal que:

$$ED=DC=a \Rightarrow AE=AB=b$$

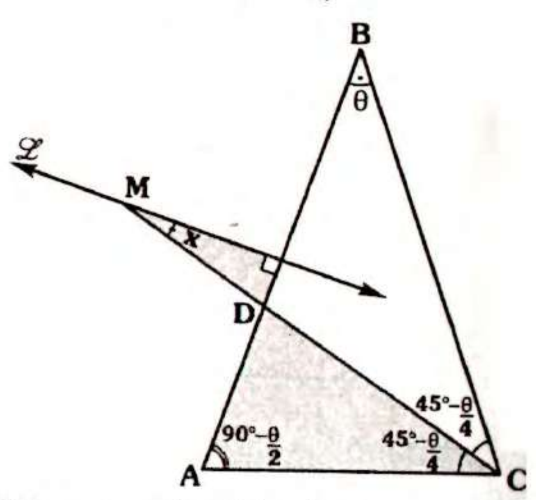
- Como $m\measuredangle EDC=60°$ y $ED=DC \Rightarrow$ el triángulo EDC es equilátero $\Rightarrow EC=a$
- Como $EC=CB \Rightarrow \Delta BCE$: isósceles
- En ΔBEC: $m\measuredangle AEB=m\measuredangle ABE=55°$
- En ΔBCE: $m\measuredangle CEB=m\measuredangle EBC=65°$

$$\Rightarrow x=55°+65°$$

$$\therefore \mathbf{x=120°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 81



- Piden x en función de θ

- Sea $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ mediatriz de $\overline{AB}$

  $\triangle ABC$ isósceles $(AB = BC)$

  $$\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA = 90° - \frac{\theta}{2}$$

- Como $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del $\measuredangle ACB$

  $$\Rightarrow m\measuredangle ACD = m\measuredangle BCD = 45° - \frac{\theta}{4}$$

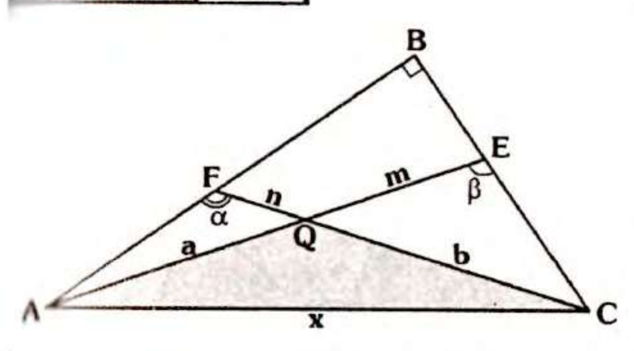
- En $\bowtie$:

  $$x + 90° = 90° - \frac{\theta}{2} + 45° - \frac{\theta}{4}$$

  $$\therefore \quad \mathbf{x = 45° - \frac{3\theta}{4}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 82



- Nos piden la cantidad de valores enteros para x.
- Dato: $a + b = 10$

  $m + n = 4$

- En $\triangle AQC$, por existencia:

  $$x < a + b \Rightarrow x < 10 \qquad \dots (I)$$

- Como $\alpha > 90°$ y $\beta > 90°$,

  En $\triangle AFC$: $x > n + b$

  $\triangle AEC$: $x > m + a$

  $$\Rightarrow 2x > \underbrace{m + n}_{4} + \underbrace{a + b}_{10}$$

  $$\Rightarrow x > 7 \qquad \dots (II)$$

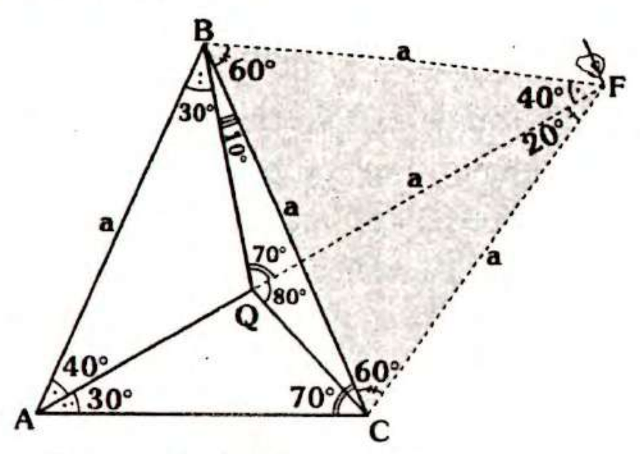
- De (I) y (II) se tiene:

  $$7 < x < 10$$

- Los valores enteros de x son **8 y 9**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 83



- Piden: $m\measuredangle BQC$
- De acuerdo a los datos

  $$m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA = 70° \Rightarrow AB = BC$$

- Prolongamos $\overline{AQ}$ y trazamos $\overline{BF}$ tal que $m\measuredangle AFB = 70°$ (pues $m\measuredangle BAQ = 40°$ y $m\measuredangle BQF = 70°$ – ver criterios de trazos auxiliares)

  $\triangle ABF$: isósceles $\Rightarrow AB = BF = a$

- Como $m\measuredangle CBF = 60°$ y $CB = BF = a \Rightarrow$ $\triangle CBF$ es equilátero $\Rightarrow CF = a$ y $m\measuredangle QFC = 20°$.
- $\triangle FQC$ isósceles

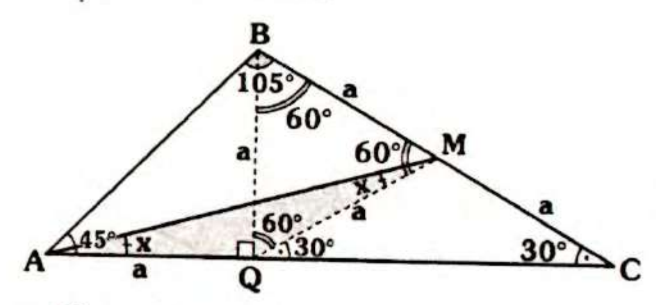
  $$\Rightarrow m\measuredangle FQC = m\measuredangle QCF = 80°$$

  $$\Rightarrow m\measuredangle BQC = 70° + 80°$$

  $$\therefore \ \mathbf{m\measuredangle BQC = 150°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 84



- Nos piden: x.
- Partimos asi: se traza $\overline{MQ}$ tal que $m\measuredangle MQC = 30° \Rightarrow \Delta QMC$ es isósceles $(QM = MC = a)$ y $m\measuredangle QMB = 60°$ y como $QM = MB \Rightarrow \Delta QBM$ es equilátero $\Rightarrow BQ = a$ y $m\measuredangle BQA = 90°$
- Luego:

  ◺AQB: isósceles $\Rightarrow AQ = QB = a$

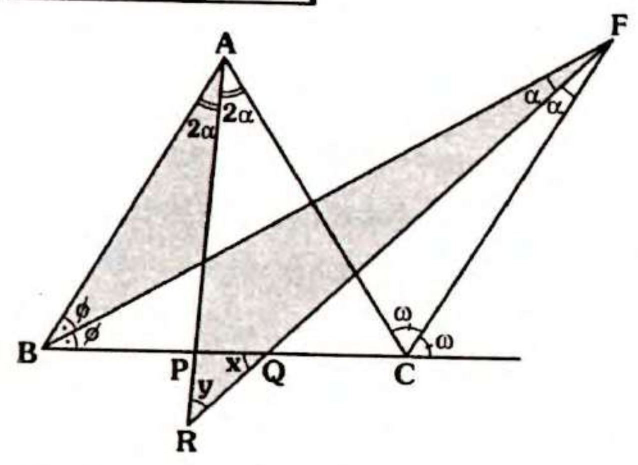
- Como $AQ = QM \Rightarrow \Delta AQM$ es isósceles:

$$x + x = 30°$$

$$\therefore \mathbf{x = 15°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 85



- Piden que analicemos que tipo de triángulo es PQR
- En ΔBAC, por ángulo entre bisectrices:

$$m\measuredangle BFC = \frac{m\measuredangle BAC}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = 2\underbrace{(m\measuredangle BFC)}_{2\alpha}$$

- En ΔFQB: $\quad x = \phi + \alpha$
- En ⚡: $\quad y + \alpha = \phi + 2\alpha$

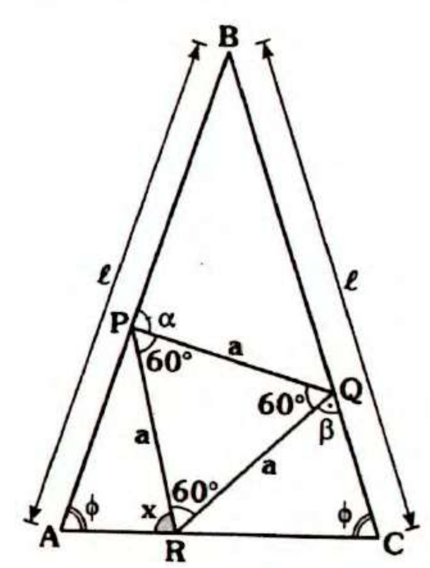
$$\Rightarrow y = \phi + \alpha$$

- Luego: $x = y$

$$\therefore \mathbf{\Delta PQR \text{ es isósceles}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 86



- Piden: x en función de α y β.
- Dato: ΔABC isósceles $(AB = BC)$ y ΔPQR equilátero
- Por ángulo exterior, en:

ΔRQC: $x + 60° = \beta + \phi$

ΔARP: $x + \phi = 60° + \alpha$

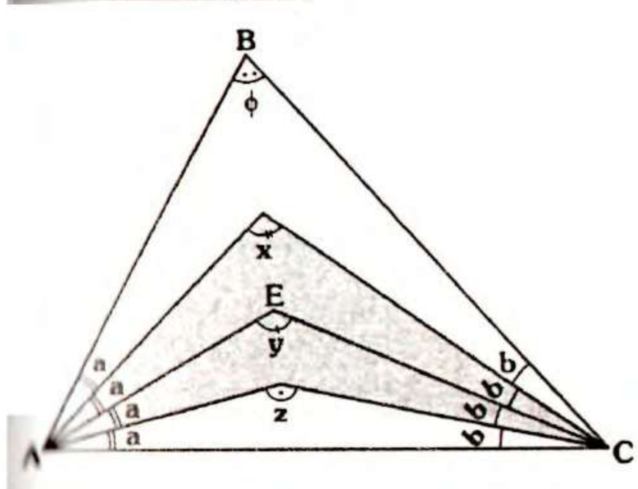
$$\Rightarrow 2x + \cancel{60° + \phi} = \beta + \alpha + \cancel{60° + \phi}$$

$$\Rightarrow 2x = \alpha + \beta$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 87



- Piden $x+y+z$ en función de ϕ.
- En la región sombreada (teorema 29):

$$y=\frac{x+z}{2} \Rightarrow x+z=2y \qquad \text{... (I)}$$

- Sea $M=x+y+z$
- Reemplazando (I), tenemos:

$$M=3y \qquad \text{... (II)}$$

Como $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{CE}$ son bisectrices de los ángulos BAC y ACB, por teorema 25:

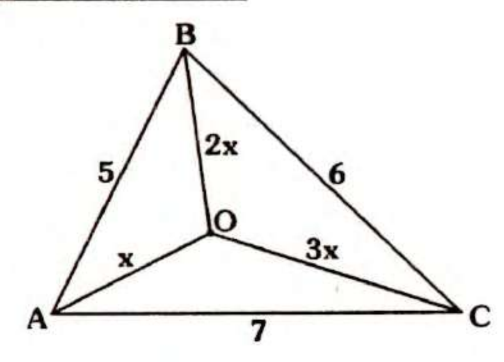
$$y=90°+\frac{\phi}{2}$$

- En (II): $M=3\left(90°+\frac{\phi}{2}\right)$

$$\therefore\ \mathbf{M=270°+\frac{3}{2}\phi}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 88



- Nos piden la variación de x.
- Del teorema 42 y 50:

$$\frac{5+6+7}{2}<x+2x+3x<\overbrace{6+7}^{\text{Dos mayores}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{3}{2}<x<\frac{13}{6} \qquad \text{...(I)}$$

Pero no es la única restricción, verifiquemos, por existencia.

$\Delta AOB:\ 2x-x<5<2x+x$ ...(II)

$\Delta AOC:\ 3x-x<7<3x+x$ ...(III)

$\Delta BOC:\ 3x-2x<6<3x+2x$ ...(IV)

De (II), (III) y (IV):

$$\frac{7}{4}<x<\frac{7}{2} \qquad \text{...(V)}$$

Por teorema 41:

$x+3x<6+5$ ...(α)

$x+2x<6+7$ ...(β)

$2x+3x<5+7$ ...(θ)

De (α), (β) y (θ):

$$x<\frac{12}{5} \qquad \text{...(VI)}$$

Finalmente:

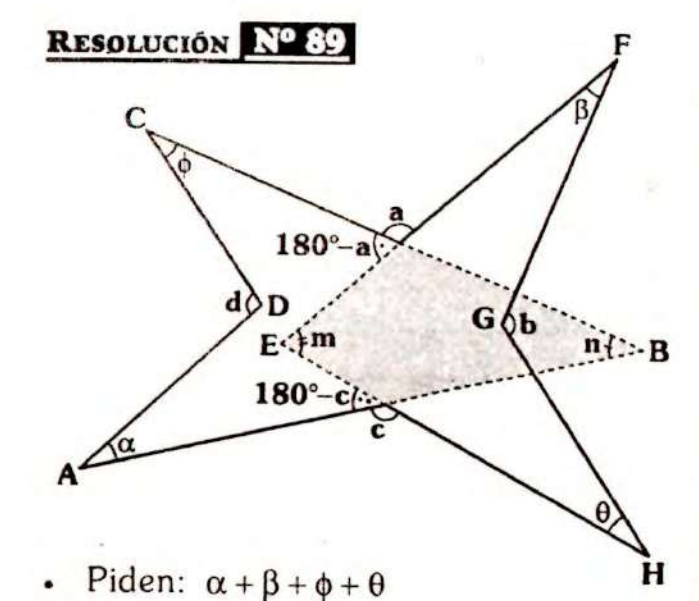
$$\frac{7}{4}<x<\frac{13}{6}$$

Es decir:

$$1,75<x<2,16$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 89



- Piden: $\alpha+\beta+\phi+\theta$
- Dato: $a+b+c+d=518°$
- En ⋗ABCD: $d=\alpha+\phi+n$ ... (I)
- En ⋖HEFG: $b=\beta+\theta+m$ ... (II)
- Sumando (I) y (II):

$$b+d=\alpha+\beta+\phi+\theta+m+n \quad \text{... (III)}$$

- En ⊳:

$$m+n=180°-a+180°-b \quad \text{... (IV)}$$

- Reemplazando (IV) en (III):

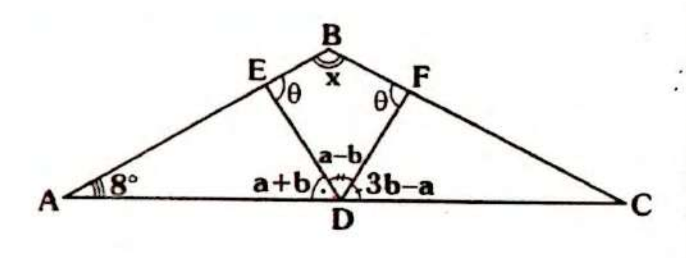
$$b+d=\alpha+\beta+\phi+\theta+360°-a-b$$

$$\Rightarrow \underbrace{a+b+c+d}_{518°}=\alpha+\beta+\phi+\theta+360°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha+\beta+\phi+\theta=158°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 90



- Nos piden: x
- Dato **b** toma su mayor valor entero
- Analicemos **b**:

$a-b>0° \Rightarrow a>b$ ... (I)

$3b-a>0° \Rightarrow 3b>a$ .. (II)

$a+b+a-b+3b-a=180°$

$\Rightarrow\ a+3b=180°$ .. (III)

- En (I): $a>b \Rightarrow \underbrace{a+3b}_{180°}>b+3b$

$\Rightarrow\ 45°>b \quad ...(\alpha)$

- En (II): $3b>a \Rightarrow 3b+3b>\underbrace{a+3b}_{180°}$

$\Rightarrow\ b>30° \ ...(\beta)$

- De (α) y (b): $30°<b<45°$

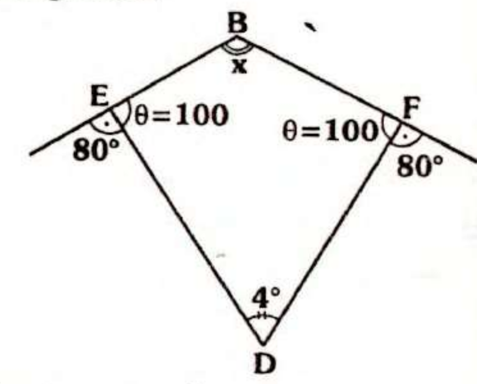
Luego del dato: $b=44°$

- En (I): $a+3(44°)=180° \Rightarrow a=48°$
- En ΔAED , por ángulo exterior:

$\theta=8°+a+b$

$\theta=8°+48°+44 \Rightarrow \theta=100°$

- Del gráfico:



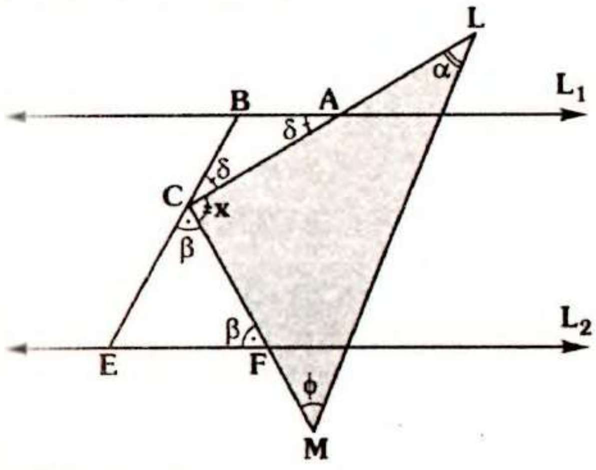
- Por teorema 6:

$$x+4°=80°+80°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=156°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 91



- Piden $\alpha+\phi$
- En ΔMCL: $\alpha+\phi+x=180°$ ... (a)

ΔFCE y ΔABC: isósceles

- También: $x+\beta+\delta=180°$ ... (I)
- Por teorema de las paralelas:

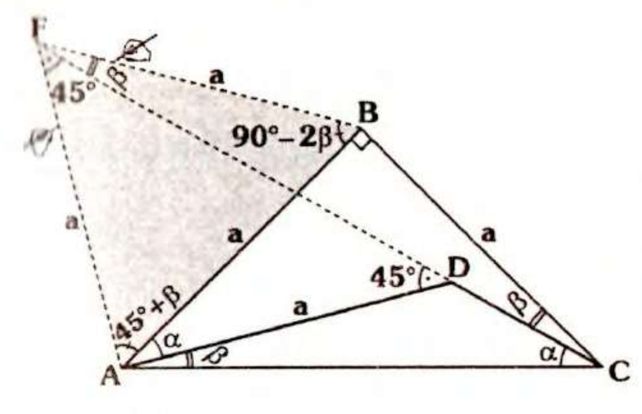
$$x=\beta+\phi \quad ...\ (II)$$

- De (I) y (II): $x+x=180° \Rightarrow x=90°$
- En (a): $\alpha+\phi+90°=180°$

$$\therefore\ \alpha+\phi=90°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 92



- Nos piden α
- Como $AB=BC \Rightarrow \alpha+\beta=45°$ ... (I)
- Se prolonga $\overline{CD}$ y se traza $\overline{BF}$ tal que $BF=BC=a \Rightarrow m\measuredangle BFC=\beta$ y $m\measuredangle FBA=90°-2\beta$
- Se tendrá luego $BF=BA=a$

$$\Rightarrow m\measuredangle BFA=m\measuredangle BAF=45°+\beta$$

$$\Rightarrow m\measuredangle DFA=45°$$

- Como:

$$m\measuredangle DFA=m\measuredangle ADF \Rightarrow AF=AD=a$$

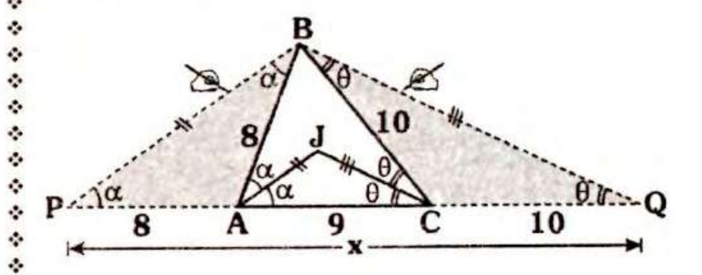
$$\Delta AFB: \text{equilátero} \Rightarrow 45°+\beta=60°$$

$$\Rightarrow \beta=15°$$

$$\therefore\ \alpha=30°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 93



- Nos piden: x
- Por dato: $\overline{AJ}//\overline{PB}$ y $\overline{CJ}//\overline{QB}$

$$\Rightarrow \Delta PAB \text{ y } \Delta CBQ: \text{isósceles}$$

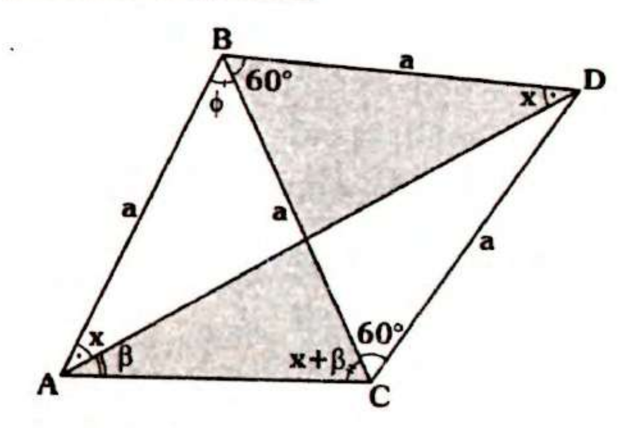
$$\Rightarrow AP=AB=8 \text{ y } CB=CQ=10$$

$$\Rightarrow x=8+9+10$$

$$\therefore\ \mathbf{x=27}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 94



- Piden: x
- Dato: $\phi - \beta = 10°$
- ΔBCD es equilátero
- ΔABC isósceles (ABC=BC)

$\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB = x + \beta$

- En la parte sombreada (⧗):

$x + \beta + \beta = x + 60°$

$\Rightarrow \beta = 30°$

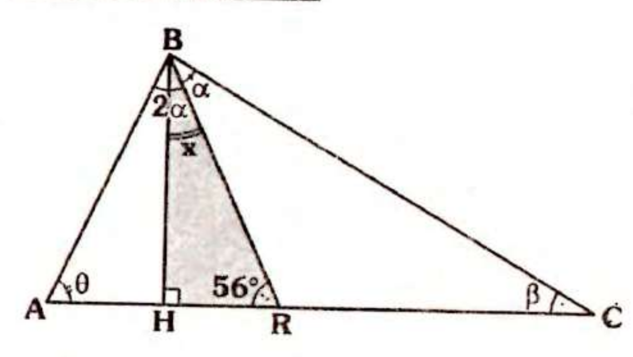
- Del dato: $\phi - \beta = 10° \Rightarrow \phi = 40°$
- En ΔABD:

$x + x + 60° + \phi = 180°$

$\therefore$ **x = 40°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 95



- Piden x:
- Dato: $\theta - 2\beta = 12°$
- Del dato: $\theta = 12° + 2\beta$

$\Delta ABC : 3\alpha + \underbrace{(12° + 2\beta)}_{\theta} + \beta = 180°$

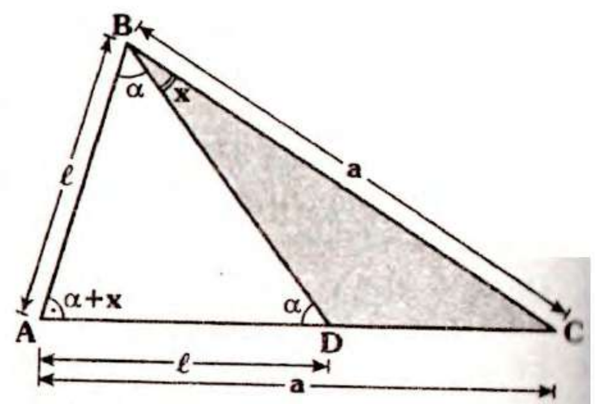
$\Rightarrow \alpha + \beta = 56°$

- ⊿HBR: $x + 56° = 90°$

$\therefore$ **x = 34°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 96



- Piden el mayor valor entero de x.
- Dato: AB=AD y AC=BC

ΔABD y ΔDBC: isósceles

- En ΔABD: $3\alpha + x = 180°$
- En ΔBCD: $x < \alpha$

$\Rightarrow 3x < 3\alpha$

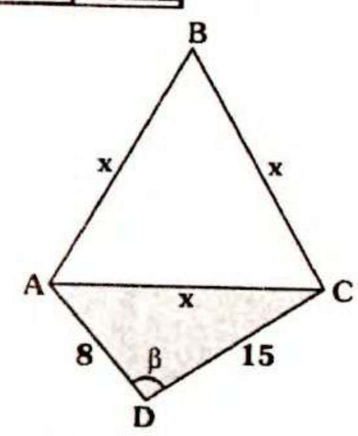
$4x < \underbrace{3\alpha + x}_{180°}$

$x < 45°$

$\therefore$ **El mayor valor entero de x es 44°.**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 97



- Piden el menor valor entero del perímetro de ▲ABC .

$$\text{Perím}_{\blacktriangle ABC} = 3x$$

- En △ADC , por existencia

$15-8 < x < 15+8 \Rightarrow 7 < x < 23$ ... (I)

- Como: $\beta > 90° \Rightarrow x > 15$ ... (II)
- Por teorema 21:

$x^2 > 8^2 + 15^2 \Rightarrow x > 17$ ... (III)

- De (I), (II) y (III):

$$17 < x < 23$$

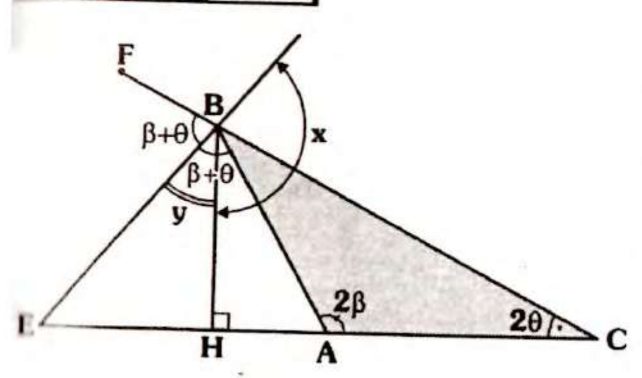
$$\Rightarrow 51 < \underbrace{3x} < 69$$

$$51 < \text{perím}_{(\blacktriangle ABC)} < 69$$

∴ **El menor valor entero del perímetro de ▲ABC es 52.**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 98



- Piden: x
- Dato: $2\beta - 2\theta = 112°$

$$\Rightarrow \beta - \theta = 56°$$

- Como $\overline{BE}$ es bisectriz exterior:

$$m\measuredangle FBE = m\measuredangle EBA = \beta + \theta$$

- También: $m\measuredangle HBA = \beta + \theta - y$
- En ◺HBA, por ángulo exterior:

$$2\beta = 90° + \beta + \theta - y$$

$$y + \underbrace{\beta - \theta}_{56°} = 90°$$

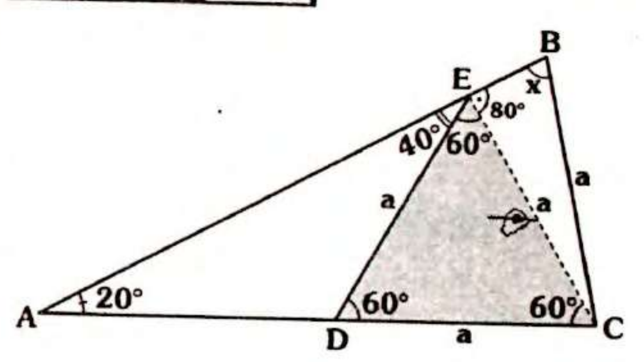
$$\Rightarrow \quad y = 34°$$

- Como: $x + y = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 146°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 99

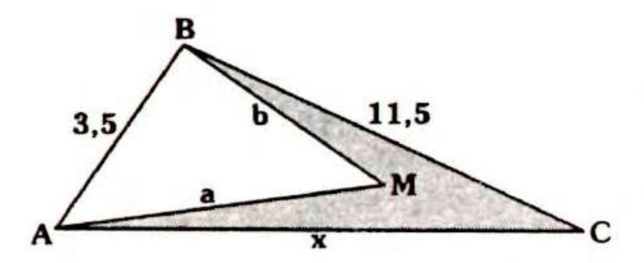


- Piden: x
- Dato: ED = DC = BC
- Como $m\measuredangle EDC = 60°$ y ED=DC, al trazar $\overline{BC}$, el triángulo EDC es equilátero ⇒EC = a y $m\measuredangle BEC = 80°$
- △EBC isósceles:

$$\therefore \ \mathbf{x = 80°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 100



- Nos piden la cantidad de valores enteros de x.
- Dato: $a+b=20$
- ΔABC: existencia

$11{,}5-3{,}5<x<11{,}5+3{,}5 \Rightarrow 8<x<15$ ... (I)

- Por teorema 41:

$$\underbrace{a+b}_{20}<x+11{,}5 \Rightarrow 8{,}5<x \quad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

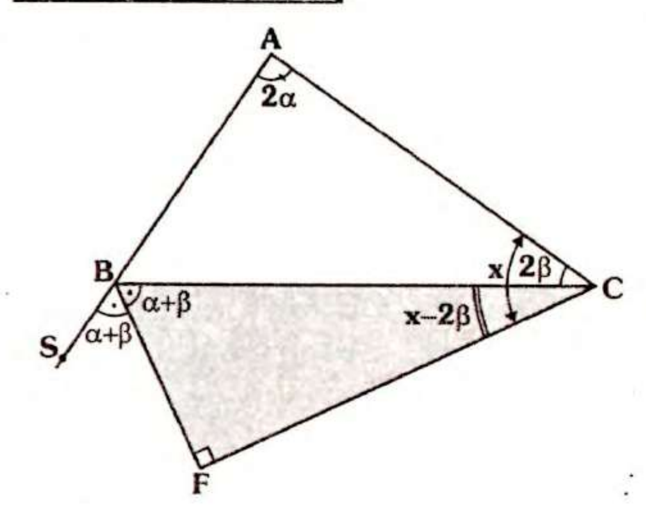
$$8{,}5<x<15$$

- Los valores enteros de x son:

$$\{9;10;11;12;13;14\}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 101



- Piden: x
- Dato: $2\alpha-2\beta=140°$

$$\Rightarrow \alpha-\beta=70° \quad \text{... (I)}$$

- Como $\overrightarrow{BF}$ es bisectriz de $\measuredangle CBS$:

$$m\measuredangle SBF=m\measuredangle FBC=\alpha+\beta$$

- En ◺BFC:

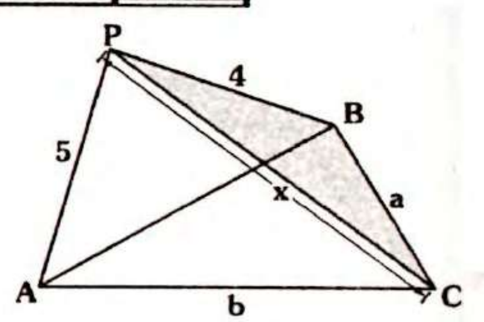
$$x-2\beta+\alpha+\beta=90°$$

$$\Rightarrow x+\underbrace{\alpha-\beta}_{70°}=90°$$

$$\therefore \mathbf{x=20°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 102



- Piden el mayor valor entero de PC.
- Dato: $a+b=11$
- Por existencia en:

ΔPBC: $x<a+4$ ... (I)

ΔAPC: $x<b+5$ ... (II)

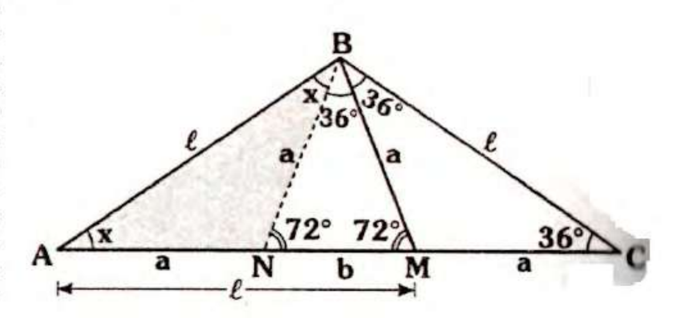
- Sumando (I) y (II):

$$2x<\underbrace{a+b}_{11}+9 \Rightarrow x<10$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de x es **9**.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 103



- Piden: x
- Dato: AM=BC y BM=MC
- Se traza $\overline{BN}$, tal que $m\measuredangle BNM = 72°$

$\Rightarrow$ $\triangle NBM$ y $\triangle BCM$ isósceles

$$\Rightarrow NB = BM = MC = a$$

$\triangle NBC$: isósceles $\Rightarrow \ell = a + b$

- Como $AM = \ell$ y $NM = b \Rightarrow AN = a$

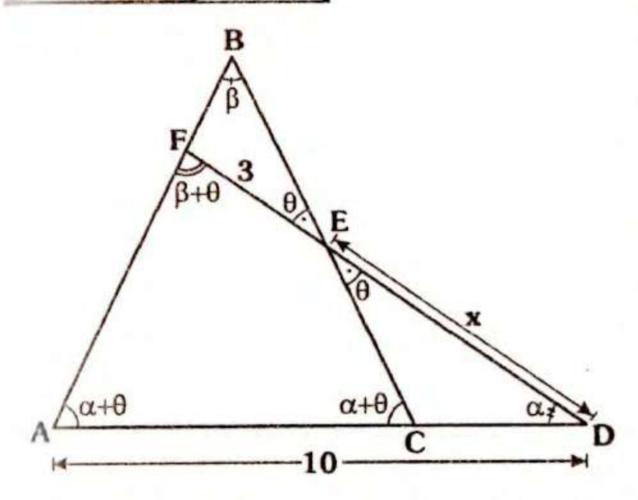
$\triangle ANB$: isósceles

$$x + x = 72°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 36°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 104



- Nos piden el mínimo valor entero de x
- Dato: $\alpha > \beta$
- Como

$AB = BC \Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB = \alpha + \theta$

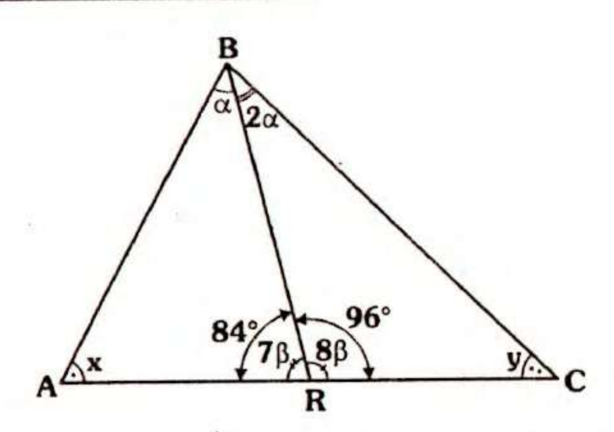
- Como $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \theta > \beta + \theta$, en el $\triangle AFC$, por teorema de la correspondencia.

$$x + 3 > 10 \Rightarrow x > 7$$

$$\therefore\ \mathbf{x_{(mínimo\ entero)} = 8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 105



- Nos piden la medida del menor ángulo interior del $\triangle ABC$.
- Dato: $\triangle ABC$ escaleno , $x < 74°$, $y < 74°$ y $3\alpha < 74°$

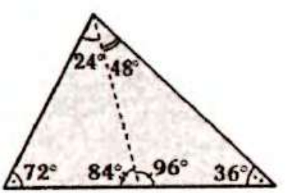
$x, y, (3\alpha) \in \mathbb{Z}^+$

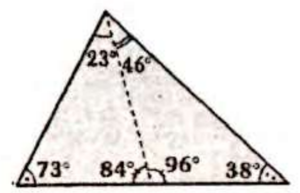
$$7\beta + 8\beta = 180° \Rightarrow \beta = 12°$$

- Del dato: $3\alpha < 74° \Rightarrow \alpha < \dfrac{74°}{3}$
- En $\triangle ABR$: $x + \alpha = 96°$
- Como: $\alpha < \dfrac{74°}{3} \Rightarrow \underbrace{x + \alpha}_{96°} < \dfrac{74°}{3} + x$

$$\Rightarrow 71,3° < x$$

- Del dato: $71,3° < x < 74°$
- Los valores enteros de **x** son 72° y 73° con ello tenemos los siguientes triángulos:



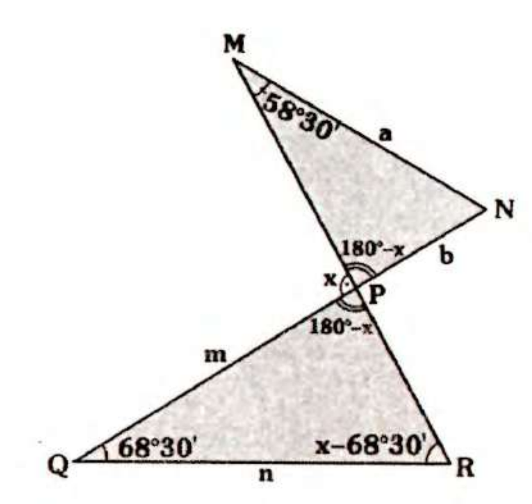


- El único triángulo escaleno es el segundo, ya que el primero es isósceles

Por lo tanto la medida del menor ángulo es 38°.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 106



- Nos piden el mayor valor entero de x
- Dato: $a > b$ y $m < n$
- En ΔPQR y ΔMNP :

$$x > 68°30' \wedge x > 58°30'$$

$$\Rightarrow x > 68°30' \qquad \ldots (I)$$

- Por teorema de la correspondencia:

 - $a > b \Rightarrow 180° - x > 58°30'$

$$\Rightarrow 121°30' > x \qquad \ldots (II)$$

 - $m < n \Rightarrow x - 68°30' < 180° - x$

$$\Rightarrow x < 124°15' \quad \ldots (III)$$

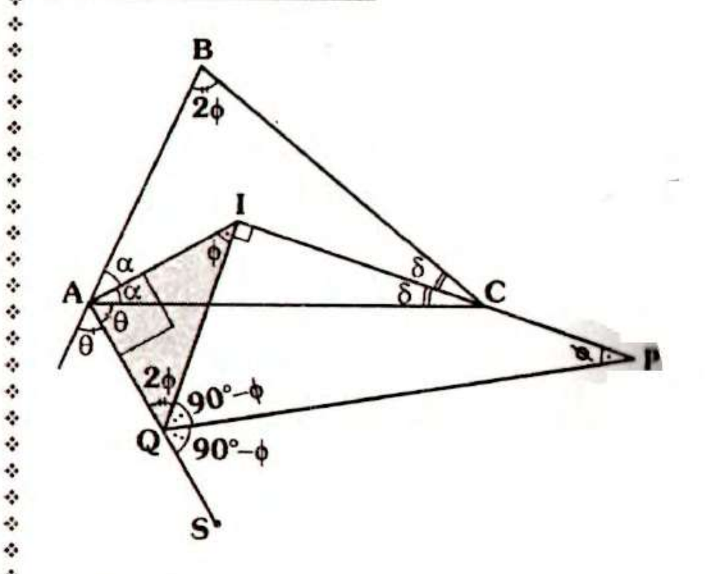
- De (I), (II) y (III):

$$68°30' < x < 121°30'$$

$$\therefore \mathbf{x_{(mayor\ entero)} = 121°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 107



- Nos piden: ϕ
- Como $\overline{AI}$ y $\overline{AQ}$ son bisectrices

$$\Rightarrow m\sphericalangle QAI = 90°$$

- En ΔABC , por ángulo entre bisectrices (teorema 25)

$$m\sphericalangle AIC = 90° + \frac{(2\phi)}{2} = 90° + \phi$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle AIQ = \phi$$

- En ◺AIQ: como $\overline{QP}$ es bisectriz

$$\Rightarrow m\sphericalangle IQP = m\sphericalangle PQS = 90° - \phi$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle AQI = 2\phi$$

- En ◺AIQ: $\phi + 2\phi = 90°$

$$\therefore \mathbf{\phi = 30°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 108

- Tenemos la ecuación:

$$x^3 - 7x^2 + 12x - nx^2 + 7nx - 12n = 0$$

- Por dato las raíces representan las longitudes de los lados de un triángulo

Nos piden la suma de los valores enteros de n.

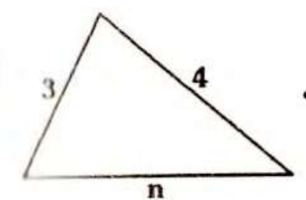
Factorizando:

$x(x^2-7x+12)-n(x^2-7x+12)=0$

$=0$

$(x-n)(x-3)(x-4)=0$

Las raíces son: n, 3 y 4:



- Por existencia:

$1<n<7$

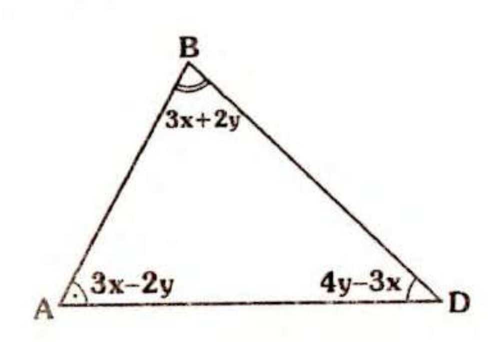
Los valores entero de **n**, son: {2;3;4;5;6}

$\Rightarrow\ S=2+3+4+5+6$

$\therefore\ \mathbf{S=20}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 109



- Nos piden el menor valor entero de y múltiplo de 3.
- Del gráfico, tendremos las siguientes restricciones:

$3x-2y>0° \Rightarrow 3x>2y$ ... (I)

$4y-3x>0° \Rightarrow 4y>3x$ ... (II)

- En ΔABD:

$3x-2y+3x+2y+4y-3x=180°$

$\Rightarrow 3x+4y=180°$

- En (I): $\underbrace{3x+4y}_{180°}>2y+4y$

$30°>y$ ...(α)

- En (II): $4y+4y>\underbrace{3x+4y}_{180°}$

$y>\dfrac{45°}{2}$ ...(β)

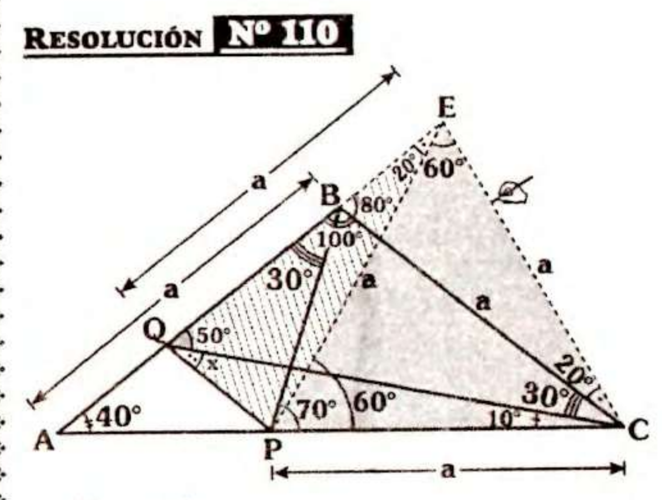
- De (α) y (β):

$\dfrac{45°}{2}<y<30°$

- Por lo tanto el menor valor de y, múltiplo de 3 es **24°**.

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 110



- Nos piden: x
- De los datos: AB = BC = PC
- Se prolonga $\overline{AB}$ y se traza $\overline{CE}$ tal que $m\measuredangle AEC=80° \Rightarrow \Delta BCE$ y ΔQEC : isósceles $\Rightarrow EC=QE=a$

- Como $m\measuredangle PCE = 60°$ y $PC = EC \Rightarrow$ el ΔPCE es equilátero.

$$\Rightarrow PE = a \quad y \quad m\measuredangle QEP = 20°$$

- Como: $QE = EP \Rightarrow \Delta QPE$ isósceles

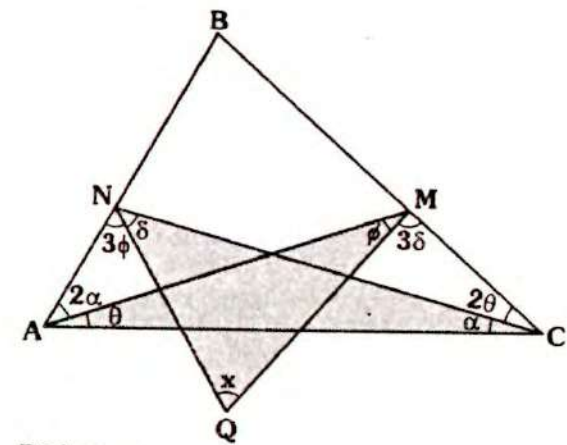
$$\Rightarrow m\measuredangle EQP = m\measuredangle QPE = 80°$$

$$50° + x = 80°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 111



- Piden: x

Observación

- *En el gráfico se cumple:*

$$a + b + c + d + e = 180°$$

Demostración:

$\measuredangle BDFE$: $\quad m\measuredangle DFE = b + d + e$

ΔACF: $a + c + d + e = 180°$

- De la observación:

$$x + \theta + \alpha + \phi + \delta = 180° \quad \text{... (I)}$$

- En ΔAMC y ΔANC:

$$3\delta + 3\theta + \alpha + \phi = 180° \quad \text{... (II)}$$

$$3\phi + 3\alpha + \delta + \theta = 180° \quad \text{... (III)}$$

- Sumando (II) y (III):

$$4(\delta + \theta + \alpha + \phi) = 360°$$

$$\Rightarrow \delta + \theta + \alpha + \phi = 90° \quad \text{... (IV)}$$

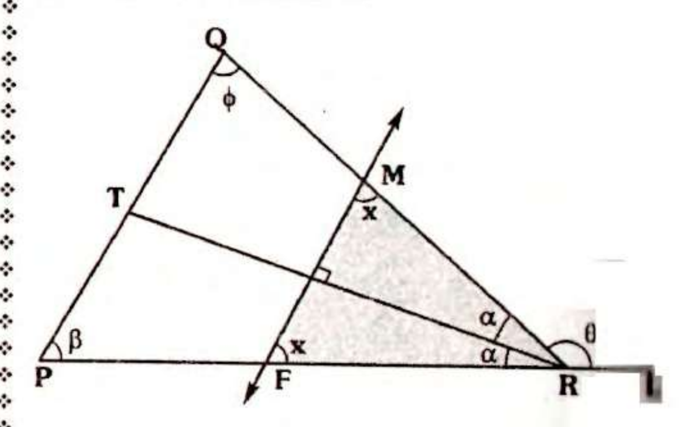
- De (IV) y (I):

$$x + 90° = 180°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 90°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 112



- Nos piden: x
- Dato: $\beta + \phi = \theta$
- Como: $x + \alpha = 90° \Rightarrow m\measuredangle RFM = x$
- ΔPQR: por ángulo exterior

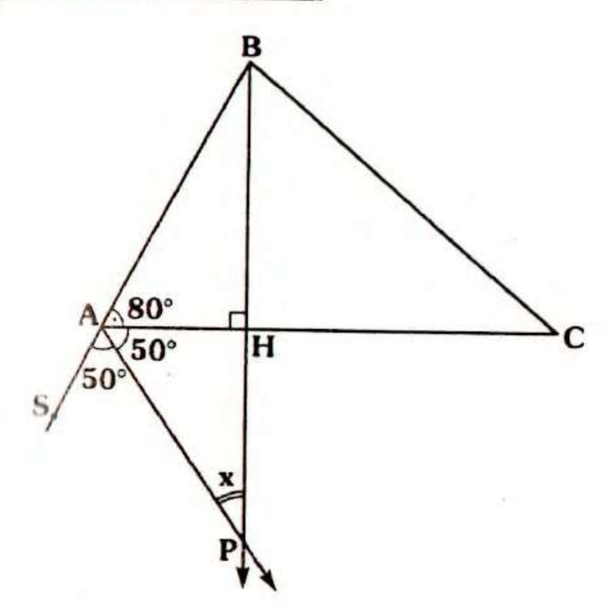
$$m\measuredangle LRQ = \underbrace{\beta + \phi}_{\theta} \quad \Rightarrow \quad m\measuredangle LRQ = \theta$$

- ΔFMR: $\quad x + x = \theta$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{\theta}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 113



- Piden: x
- Dato: $m\measuredangle ABC + m\measuredangle ACB = 100°$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = 80°$$

- Como $\overrightarrow{AP}$ es bisectriz

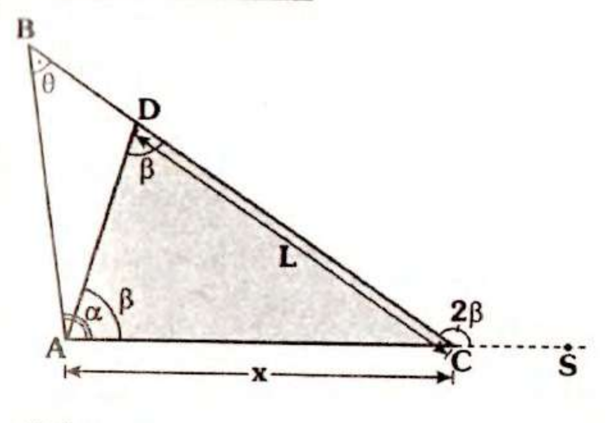
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle SAP = m\measuredangle CAP = 50°$$

En $\triangle$AHP: $x + 50° = 90°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 40°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 114



- Piden: x
- Dato: $CD = L$ y $\alpha + \theta = 2\beta$
- Por ángulo exterior en:
- ΔABC: $m\measuredangle SCB = \alpha + \theta$

$$\Rightarrow m\measuredangle DCS = 2\beta$$

- ΔADC: $m\measuredangle CAD + \beta = 2\beta$

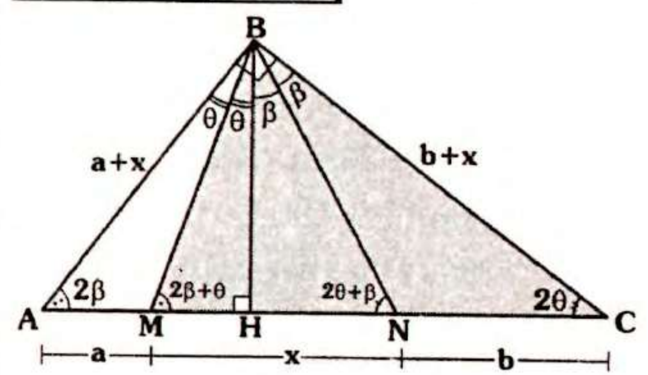
$$\Rightarrow m\measuredangle CAD = \beta$$

$\Rightarrow \Delta ADC$: isósceles

$$\therefore \ \mathbf{x = L}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 115



- Piden: x
- Dato: $AB + BC - AC = k$
- En $\triangle$ABC:

$$m\measuredangle BAC = m\measuredangle HBC = 2\beta$$

$$m\measuredangle ACB = m\measuredangle HBA = 2\theta$$

- Como: $m\measuredangle ANB = m\measuredangle ABN$ y $m\measuredangle NMB = MBC$

$\Rightarrow \Delta ABN$ y ΔMBC : isósceles

$\Rightarrow AB = a + x$ y $BC = b + x$

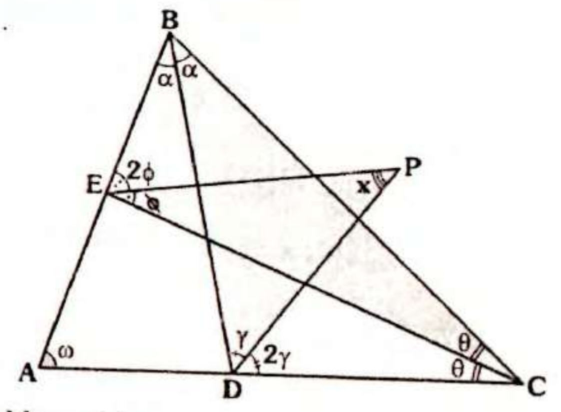
- En el dato:

$$(a + x) + (b + x) - (a + b + x) = k$$

$$\therefore \ \mathbf{x = k}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 116



- Nos piden: x
- En la región sombreada, de la observación del problema 111.

$$x + \theta + \gamma + \phi + \alpha = 180° \quad \ldots (I)$$

- En ΔEBC y ΔBDC :

$$3\phi + 2\alpha + \theta = 180° \quad \ldots (II)$$

$$3\gamma + 2\theta + \alpha = 180° \quad \ldots (III)$$

- Sumando (II) y (III):

$$3(\theta + \gamma + \phi + \alpha) = 360°$$

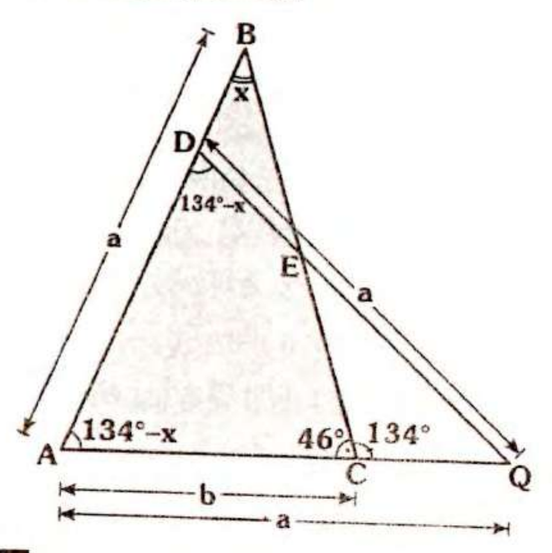
$$\Rightarrow \theta + \gamma + \phi + \alpha = 120°$$

- En (I): $x + 120° = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 117



- Piden el valor entero de x
- Como: $C \in \overline{AQ} \Rightarrow a > b$
- ΔACQ por teorema de la correspondencia:

$$b < a \Rightarrow x < 46° \quad \ldots (I)$$

- ΔQAD : isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle QAD = m\measuredangle ADQ = 134° - x$$

- También se cumple (*por teorema 17*

$$134° - x < 90° \Rightarrow 44° < x \quad \ldots (II)$$

- De (I) y (II):

$$44° < x < 46$$

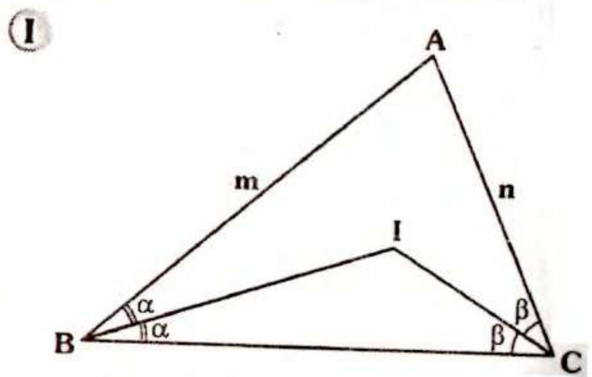
- El valor entero de x es **45°**.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 118

- Analicemos las proposiciones:

I



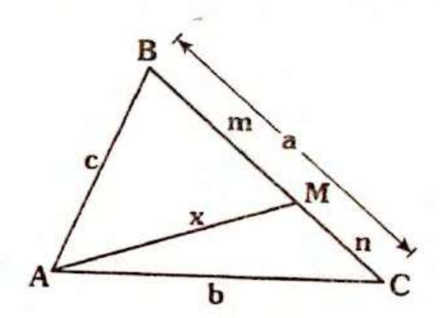
- Como: $m > n \Rightarrow 2\beta > 2\alpha$

$$\Rightarrow \beta > \alpha$$

- En ΔAIC: $\beta > \alpha \Rightarrow IB > IC$

La proposición es verdadera.

II

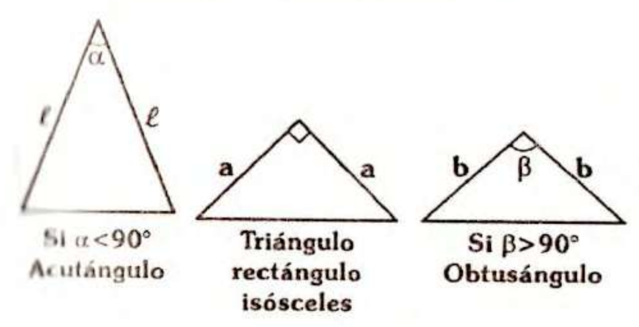


- Sea: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$
- En ΔABM y ΔAMC:

$$x<b+n$$
$$x<c+m$$
$$2x<b+c+\underbrace{m+n}_{a}$$
$$\Rightarrow\ x<\frac{a+b+c}{2}$$
$$x<p$$

La proposición es verdadera.

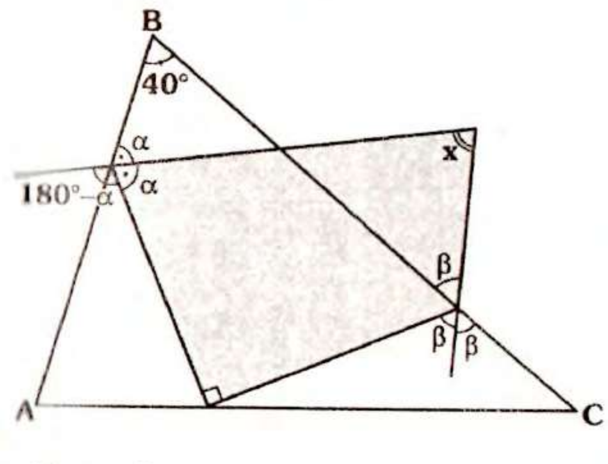
III Si un triángulo es isósceles, este puede ser acutángulo, rectángulo u obtusángulo, asi tenemos:



La proposición es F.

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 119



Nos piden: x

- En la región sombreada, por teorema 6

$$x+90°=180°-\alpha+\beta$$
$$x=90°+\beta-\alpha \quad \text{... (I)}$$

- En ⚡:

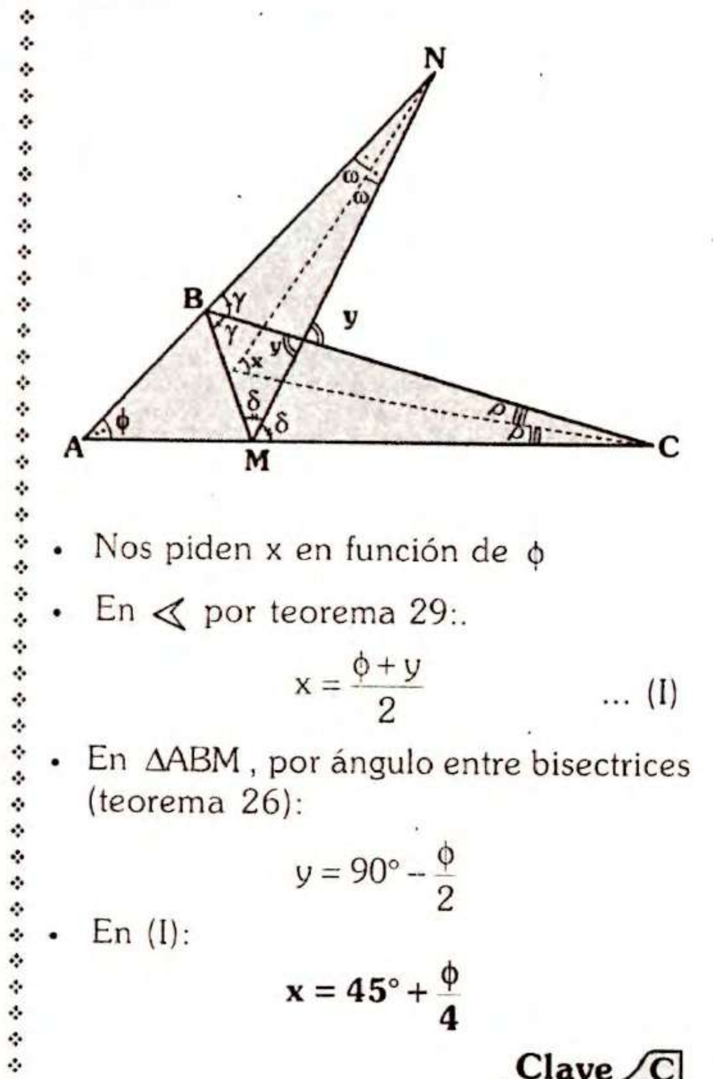
$$x+\beta=40°+\alpha \quad \text{... (II)}$$

- Sumando (I) y (II):

$$2x=130°$$
$$\therefore\ \mathbf{x=65°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 120



- Nos piden x en función de ϕ
- En ∢ por teorema 29:.

$$x=\frac{\phi+y}{2} \quad \text{... (I)}$$

- En ΔABM, por ángulo entre bisectrices (teorema 26):

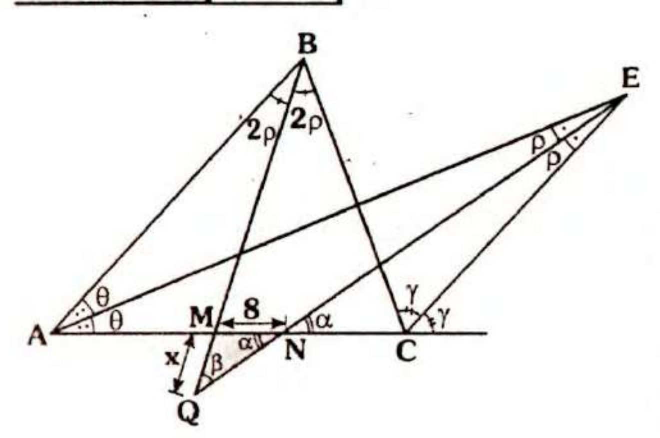
$$y=90°-\frac{\phi}{2}$$

- En (I):

$$\mathbf{x=45°+\frac{\phi}{4}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 121



- Piden: x
- Dato: $MN = 8$
- Por ángulo entre bisectrices, en el ΔABC (teorema 27), en ΔABC:

$$m\sphericalangle AEC = \frac{m\sphericalangle ABC}{2}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle MBC = 2\rho$$

- Como $\overrightarrow{EN}$ es bisectrices del $\sphericalangle AEC$

$$m\sphericalangle AEN = m\sphericalangle NEC = \rho$$

- En ΔAEN: $\alpha = \theta + \rho$ ... (I)
- En (figura A, B, E, Q):

$$\theta + 2\rho = \beta + \rho \Rightarrow \beta = \theta + \rho \quad ... \text{(II)}$$

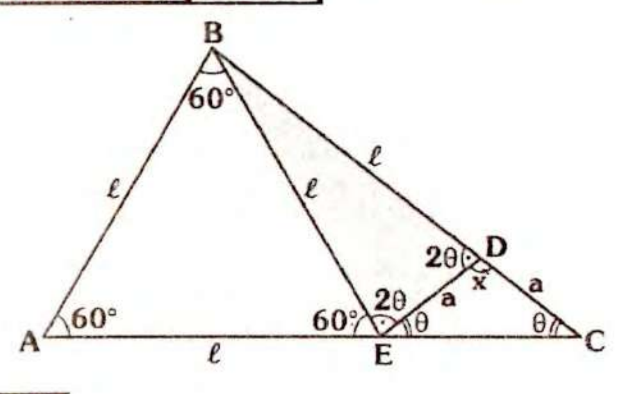
- De (I) y (II):

$$\alpha = \beta \Rightarrow \Delta QMN : \text{isósceles}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 8}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 122

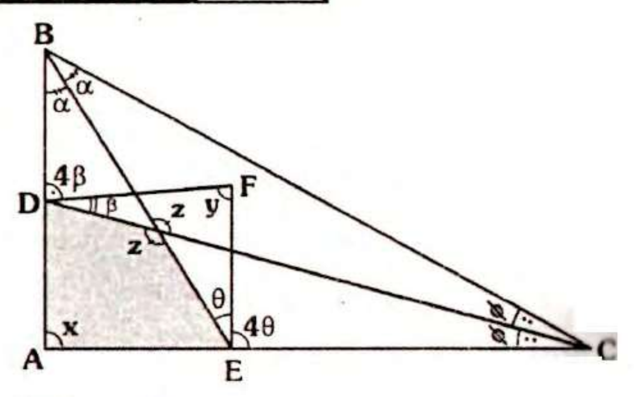


- Piden: x
- Como: $AB = AE$ y $m\sphericalangle BAE = 60° \Rightarrow \Delta ABE$ es equilátero $\Rightarrow BE = \ell$ y $m\sphericalangle AEB = 60°$
- ΔEBD : isósceles
- Se tiene: $x + 2\theta = 180°$ ... (I)
- También: $\theta + 2\theta + 60° = 180° \Rightarrow \theta = 40°$
- En (I): $x + 2(40°) = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 100°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 123



- Nos piden: x
- Dato: $x + y = 180°$
- En DFEA, por teorema 6:

$$\underbrace{x + y}_{180°} = 4\beta + 4\theta \Rightarrow \beta + \theta = 45°$$

- En ΔABC por ángulo entre bisectrices (*teorema* 25):

$$z = 90° + \frac{x}{2} \quad ... \text{(I)}$$

- En la región sombreada (*teorema* 6)

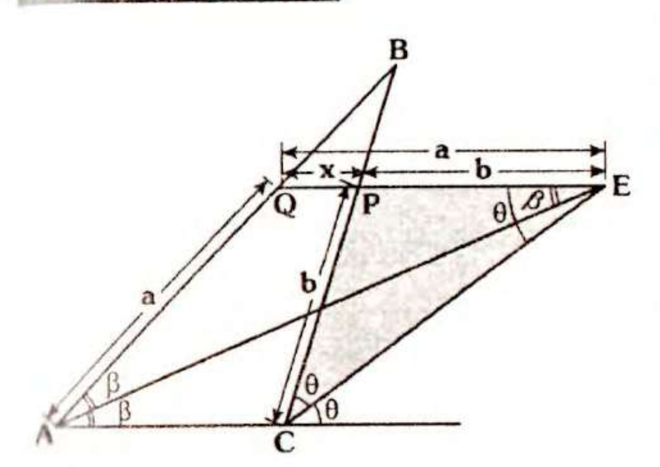
$$x + z = 5\beta + 5\theta$$

$$\Rightarrow x + 90° + \frac{x}{2} = 5\underbrace{(\beta + \theta)}_{45°}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 90°}$$

Clave C

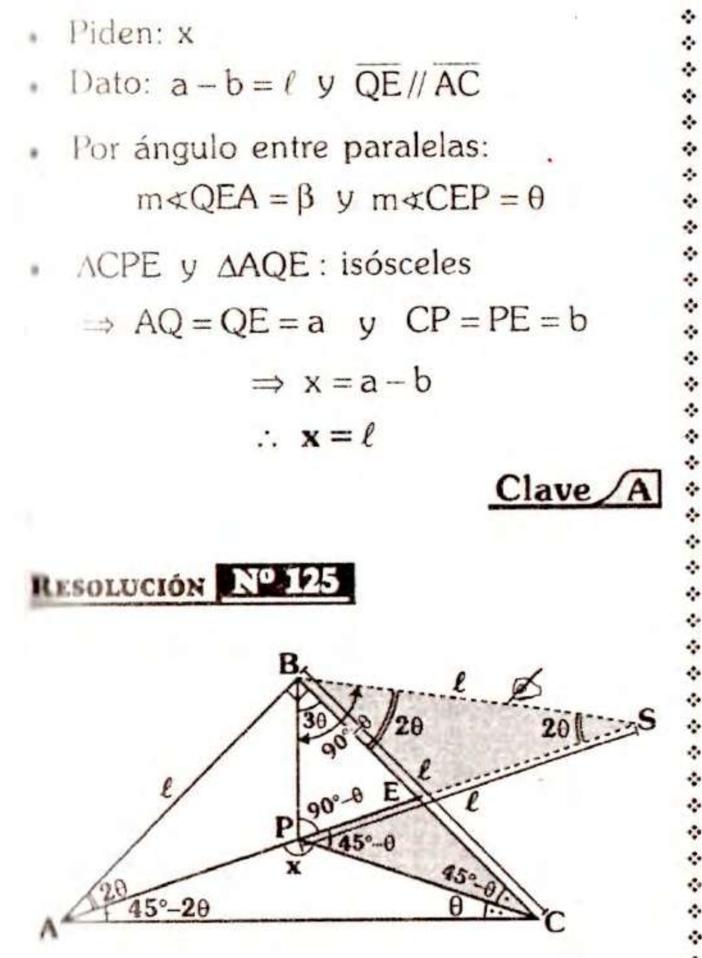
RESOLUCIÓN Nº 124



- Piden: x
- Dato: $a - b = \ell$ y $\overline{QE} // \overline{AC}$
- Por ángulo entre paralelas:
  $m\measuredangle QEA = \beta$ y $m\measuredangle CEP = \theta$
- $\triangle CPE$ y $\triangle AQE$: isósceles
  $\Rightarrow AQ = QE = a$ y $CP = PE = b$
  $\Rightarrow x = a - b$
  $\therefore$ $\mathbf{x = \ell}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 125

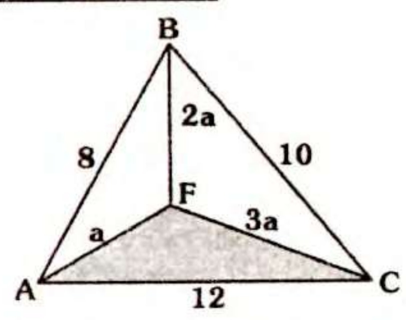


- Piden: x
- Dato: AB=BC
- En $\triangle APC$: $x + 45° - \theta = 180°$
  $\Rightarrow x = 135° + \theta$ ... (I)

- Se prolonga $\overline{AP}$ ($m\measuredangle BPE = 90° - \theta$) y se traza $\overline{BS}$ tal que $m\measuredangle BSP = 2\theta$
  $\Rightarrow \triangle ABS$ y $\Rightarrow \triangle PBS$ son isósceles
  $AB = BS = PS = \ell$
- Como $PS = BC$ y $\triangle PEC$ isósceles
  $\Rightarrow BE = ES \Rightarrow \triangle BES$: isósceles
  $\Rightarrow m\measuredangle EBS = 2\theta$
- $m\measuredangle PBS$: $3\theta + 2\theta = 90° - \theta$
  $\Rightarrow \theta = 15°$
- En (I): $x = 135° + 15°$
  $\therefore$ $\mathbf{x = 150°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 126



Analicemos "a" para ello encontremo el menor intervalo para "a".

- Por existencia:
  $2a - a < 8 < 2a + a$
  $3a - 2a < 10 < 3a + 2a$
  $3a - a < 12 < 3a + a$
  $\Rightarrow 3 < a < 6$ ... (I)
- Por teorema 50:
  $a + 2a + 3a < \overbrace{10 + 12}^{\text{Dos mayores}}$
  $\Rightarrow a < \dfrac{11}{3}$ ... (β)

- . Por teorema 41:

$$a + 2a < 12 + 10$$
$$2a + 3a < 8 + 12$$
$$a + 3a < 8 + 10$$
$$\Rightarrow \quad a < 4 \qquad \ldots(\gamma)$$

De (α), (β) y (γ):

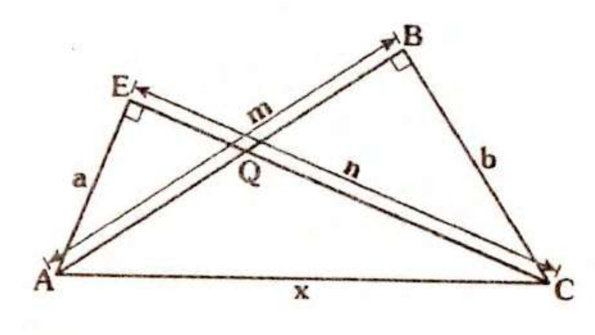
$$3 < a < \frac{11}{3}$$

Ahora busquemos, la expresión pedida:

$$24 < \underbrace{4a + 12} < \frac{80}{3}$$
$$24 < \text{Perim.}_{(\Delta AFC)} < 26,6$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 127



- Nos piden la suma de valores de x.
- Dato: $m + n = 12$; $a + b = 6$; $m > b$ y $n > a$.
- En ⊿AEC y ⊿ABC:

$$x > n \qquad \ldots(\text{I})$$
$$x > m \qquad \ldots(\text{II})$$

- Sumando (I) y (II):

$$2x > \underbrace{m + n}_{12} \Rightarrow x > 6$$

- Por existencia; en:

$$⊿AEC: \; x < a + n \qquad \ldots(\text{III})$$
$$⊿ABC: \; x < b + m \qquad \ldots(\text{IV})$$

- Sumando (III) y (IV):

$$2x < \underbrace{a + b}_{6} + \underbrace{m + n}_{12} \Rightarrow x < 9$$

- Luego se tendrá: $6 < x < 9$
- Los valores enteros de x, son: 7 y 8
- Por lo tanto, la suma de valores enteros de x, es 15.

Clave C

Nota

Nos faltaría la restricción, para los triángulos rectángulos.
Se plantearía, el siguiente teorema:

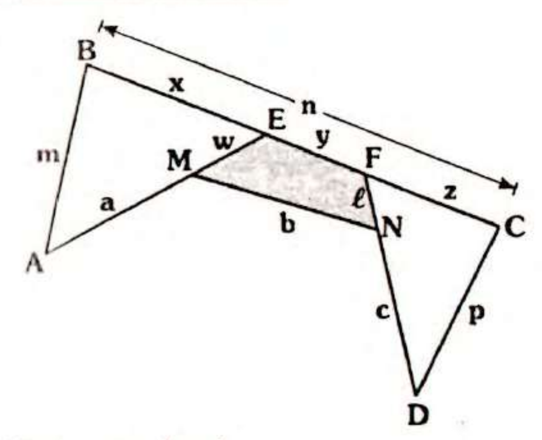
$$MC > MA$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + n^2}{2}} \geq \frac{a + n}{2} \text{ y } \sqrt{\frac{b^2 + m^2}{2}} \geq \frac{b + m}{2}$$

Con esto se llega: $x \geq \underbrace{\frac{9}{2}\sqrt{2}}_{6,36}$

Los valores obtenidos no varían.

RESOLUCIÓN Nº 128



- Dato: $n - b = k$
- Analicemos las relaciones entre a; b; c; m; n; y p.
- Por existencia en:

$$\triangle ABE: \ a + w < m + x \quad \ldots (I)$$

$$\triangle DEC: \ c + \ell < p + z \quad \ldots (II)$$

- Por teorema 54:

$$b < w + y + \ell \quad \ldots (III)$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$a + b + c + \cancel{w + \ell} < m + p + \underbrace{x + y + z}_{n} + \cancel{w + \ell}$$

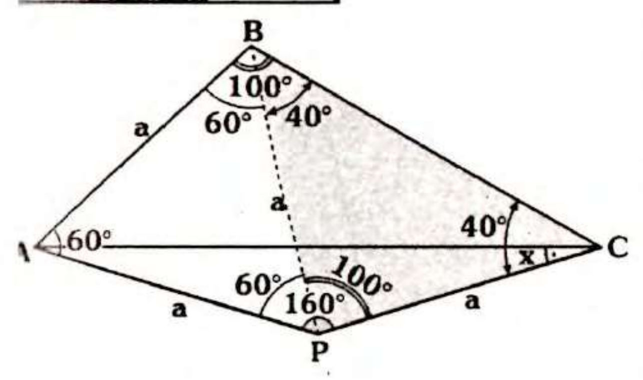
$$\Rightarrow a + b + c < m + n + p$$

$$a + c < m + p + \underbrace{n - b}_{k}$$

$$\therefore a + c < m + p + k$$

Clave C

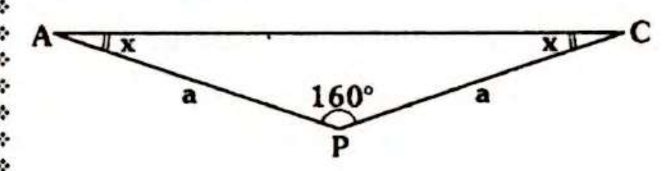
RESOLUCIÓN Nº 129



- Piden: x
- Como $AB = AP$ y $m\sphericalangle BAP = 60° \Rightarrow$ al trazar $\overline{BP}$, el triángulo ABP es equilátero $\Rightarrow m\sphericalangle PBC = 40°$; $BP = a$ y $m\sphericalangle BPC = 100° \Rightarrow m\sphericalangle PCB = 40°$

$$\Rightarrow \triangle BCP \text{ es isósceles } \Rightarrow PC = a$$

- Del gráfico:

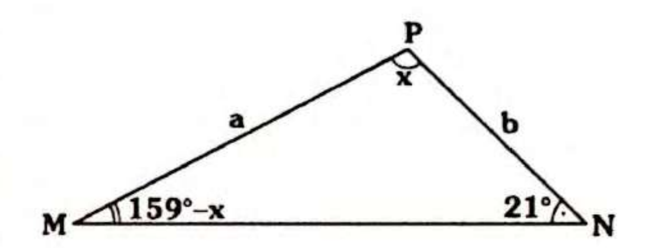


$$x + x + 160° = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 10°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 130



- Nos piden el mínimo valor entero de x
- Dato: $a > b$
- Por teorema de la correspondencia:

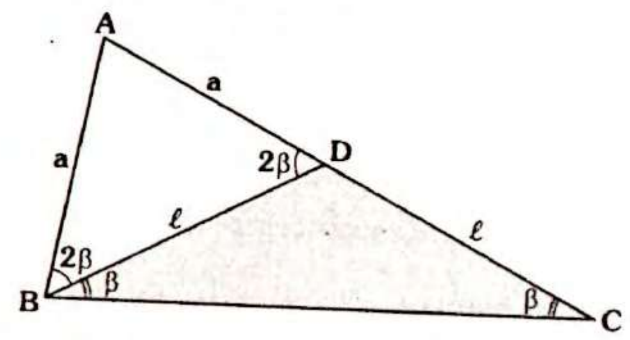
$$21° > 159° - x$$

$$\Rightarrow x > 138°$$

$$\therefore \mathbf{x_{(mínimo\ entero)} = 139°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 131



- Piden: $m\sphericalangle B$ en función de $m\sphericalangle C$
- Sea $m\sphericalangle C = \beta$
- ΔBDC y ΔBAD : isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle DBC = m\sphericalangle BCD = \beta$

$m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ADB = 2\beta$

$\Rightarrow m\sphericalangle B = 3\beta$

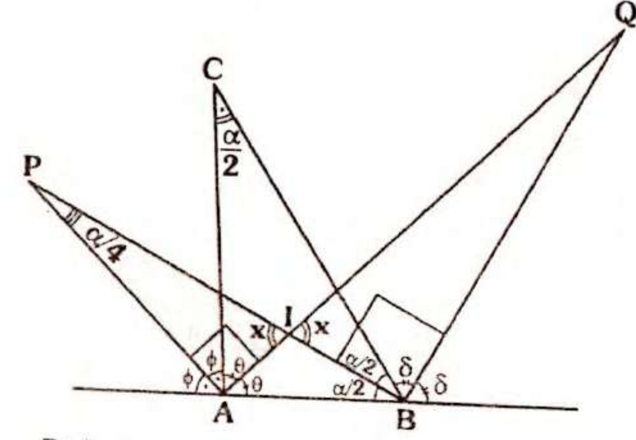
$\therefore$ **$m\sphericalangle B = 3(m\sphericalangle C)$**

Clave C



En este problema se ha considerado la notación $m\sphericalangle C$, *la cual hace referencia a* $m\sphericalangle ACB$ *y* $m\sphericalangle B = m\sphericalangle ABC$.

RESOLUCIÓN Nº 132



- Piden: x
- Se tiene entonces:

$$m\sphericalangle PAQ = m\sphericalangle PBQ = 90°$$

- Por ángulo entre bisectrices (*teorema 27*)

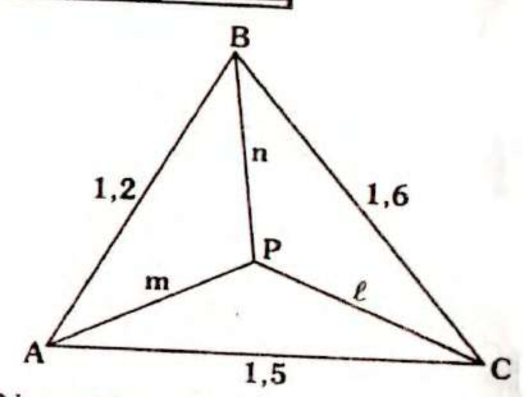
$$m\sphericalangle APB = \frac{\alpha}{4}$$

- En ◺IAP: $x + \frac{\alpha}{4} = 90°$

$$\therefore \mathbf{x = 90° - \frac{\alpha}{4}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 133



- Nos piden el valor de: $m + n + \ell$ por teorema 42 y 50:

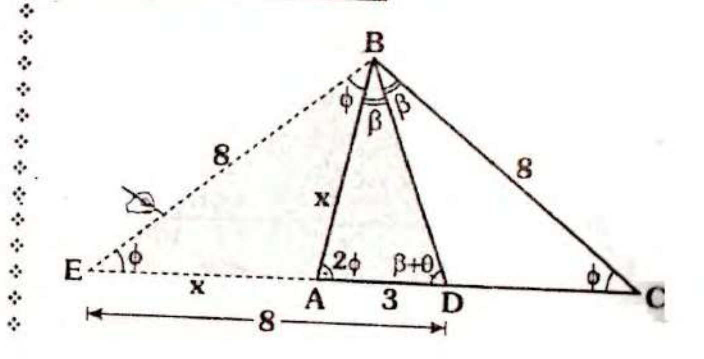
$$\frac{1,2 + 1,6 + 1,5}{2} < m + n + \ell < 1,6 + 1,5$$

$$2,1 < m + n + \ell < 3,1$$

- Por lo tanto el valor entero de $m + n + \ell$ es **3**.

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 134



- Nos piden: AB
- De acuerdo a los criterios de trazos auxiliares. Se prolonga $\overline{CA}$ y se traza $\overline{BE}$ tal que $m\sphericalangle BEC = \phi \Rightarrow \Delta ABE$ y ΔEBD son isósceles.

$$\Rightarrow EB = BC = 8 \quad y \quad EA = AB = x$$

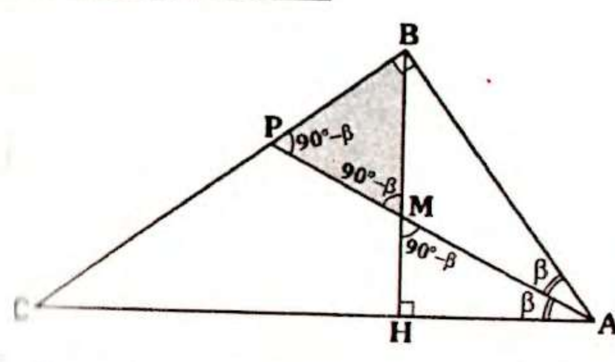
- Como: $m\sphericalangle EBC = m\sphericalangle EDB = \beta + \phi$

$$\Rightarrow x + 3 = 8$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 5}$$

Clave C

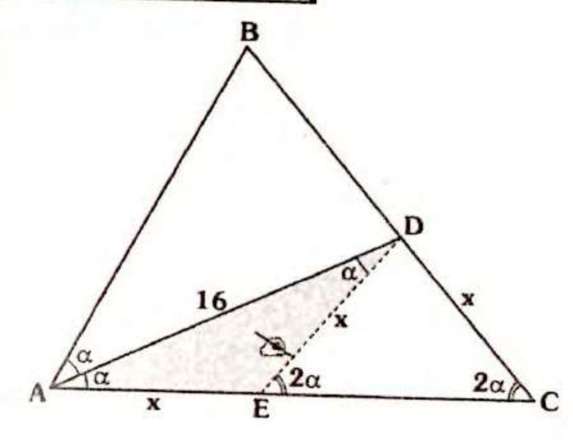
RESOLUCIÓN Nº 135



- Nos piden verificar que tipo de triángulo es MBP.
- En ◺HMA: $m\sphericalangle AMH = 90° - \beta$
- En ◺ABP: $m\sphericalangle BPA = 90° - \beta$
- Por lo tanto el triángulo MBP **es isósceles**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 136



- Nos piden la menor longitud de x.
- En ΔADC por teorema de la correspondencia.
- Como:

$$m\sphericalangle DAC < m\sphericalangle ACD \Rightarrow x < 16 \quad \dots (I)$$

- Se traza $\overline{DE}$ tal que $m\sphericalangle ADE = \alpha$

$$\Rightarrow \Delta ADE \ y \ \Delta EDC : \text{isósceles}$$

$$\Rightarrow AE = ED = x$$

- En ΔADE, por existencia:

$$16 < x + x \Rightarrow 8 < x \quad \dots (II)$$

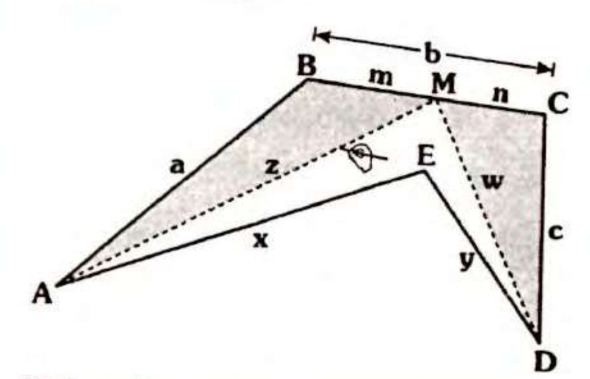
- De (I) y (II):

$$8 < x < 16$$

$$\therefore \ \mathbf{x_{(mínimo\ entero)} = 9}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 137



- Piden demostrar: $x + y < a + b + c$
- Por existencia en:

$$\Delta ABM: \ z < a + m \quad \dots (I)$$

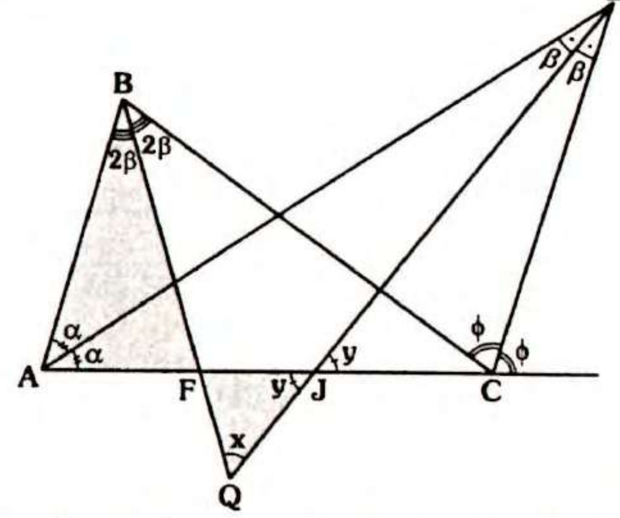
$$\Delta MCD: \ w < c + n \quad \dots (II)$$

- En ⩓AMDE: $x + y < z + w \quad \dots (III)$
- Sumando (I), (II) y (III)

$$x + y + \cancel{z + w} < a + c + \underbrace{m + n}_{b} + \cancel{z + w}$$

$$\therefore \ \mathbf{x + y < a + b + c}$$

RESOLUCIÓN Nº 138



- Nos piden demostrar que el triángulo FQJ es isósceles
- En ΔABC , por ángulo entre bisectrices (*teorema* 27):

$$m\sphericalangle AEC = \frac{m\sphericalangle ABC}{2}$$

$$\Rightarrow\ m\sphericalangle AEJ = m\sphericalangle JEC = \beta$$

$$\Rightarrow\ m\sphericalangle ABF = m\sphericalangle FBC = 2\beta$$

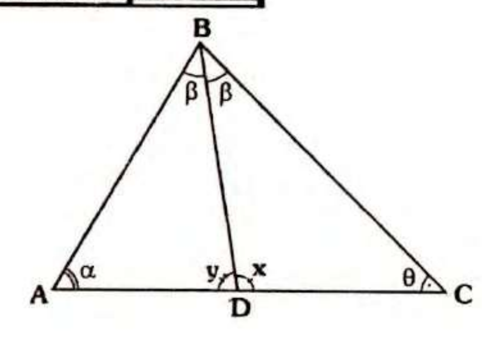
- En $\Delta AEJ : y = \alpha + \beta$
- En la parte sombreada (⋈):

$$x + y = 2\alpha + 2\beta$$

$$x + y = 2\underbrace{(\alpha + \beta)}_{y} \quad \Rightarrow\ x = y$$

- Por lo tanto el triángulo FQJ es isósceles.

RESOLUCIÓN Nº 139



- Piden demostrar: $x - y = \alpha - \theta$
- Por ángulo exterior:

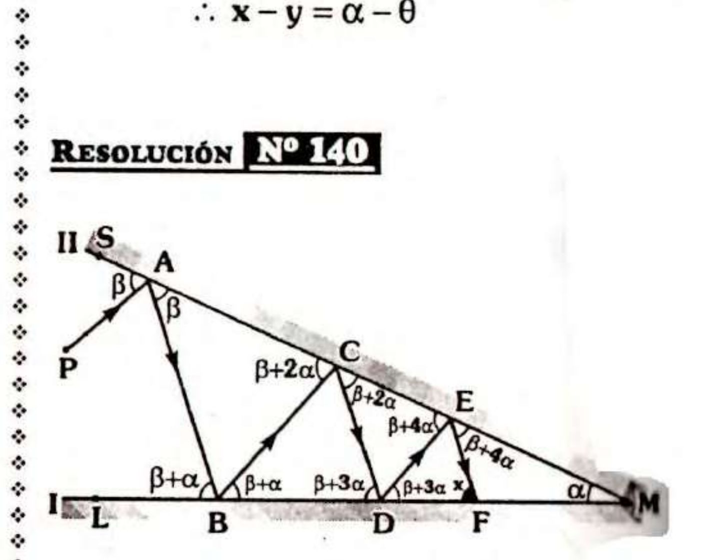
En ΔABD : $x = \alpha + \beta$

En ΔBDC : $y = \theta + \beta$

$$\Rightarrow\ x - y = (\alpha + \beta) - (\theta + \beta,$$

$$\therefore\ \mathbf{x - y = \alpha - \theta}$$

RESOLUCIÓN Nº 140



- Piden: x en función de β y α .
- De la condición (ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión):

$$m\sphericalangle SAP = m\sphericalangle BAC = \beta$$

$$m\sphericalangle ABL = m\sphericalangle CBD = \beta + \alpha$$

$$m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle DCE = \beta + 2\alpha$$

$$m\sphericalangle CDB = m\sphericalangle EDF = \beta + 3\alpha$$

$$m\sphericalangle CED = m\sphericalangle FEM = \beta + 4\alpha$$

- En ΔEFM , por ángulo exterior:

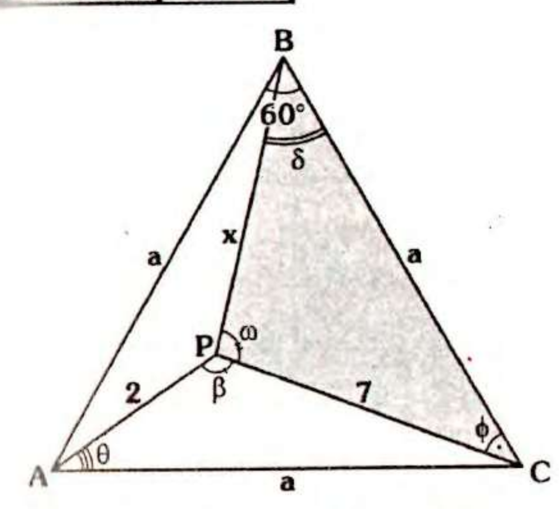
$$x = \beta + 4\alpha + \alpha$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \beta + 5\alpha}$$

Clave E

Solucionario Ciclo Semestral

RESOLUCIÓN Nº 141



- Nos piden el mayor valor entero de x.
- En $\triangle APC$, por existencia:

$7-2<a<7+2 \Rightarrow 5<a<9$ ... (I)

- También $\theta<60°$ y $60°<\beta \Rightarrow \theta<\beta$
- Por teorema de la correspondencia:

como: $\beta>\theta \Rightarrow a>7$ ... (II)

- En ABCP; por teorema 41

$a+a>7+2 \Rightarrow a>4,5$ ... (III)

- De (I), (II) y (III):

$7<a<9$ ... (IV)

- Pero "a" no es entero (*no es dato*)
- En $\triangle BPC$: $\phi<60°$ y $60°<\omega \Rightarrow \phi<\omega$

Como: $\phi<\omega \Rightarrow x<a$

Pero: $a<9 \Rightarrow x<9$

$\therefore\ \mathbf{x_{(mayor\ entero)}=8}$

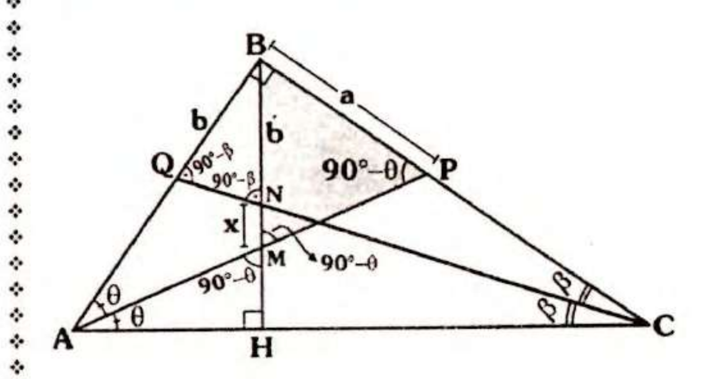
Clave C



Nota

Para acotarlo inferiormente, se puede usar el teorema 41.

RESOLUCIÓN Nº 142



- Piden: x en función de a y b.
- En ⊿AHM y ⊿NHM:

$m\measuredangle AHM=90°-\theta$ y $m\measuredangle HNC=90°-\beta$

- En ⊿QBC y ⊿ABP:

$m\measuredangle BQC=90°-\beta$ y $m\measuredangle APB=90°-\theta$

$\Rightarrow \triangle QBN$ isósceles $\Rightarrow BQ=BN=b$

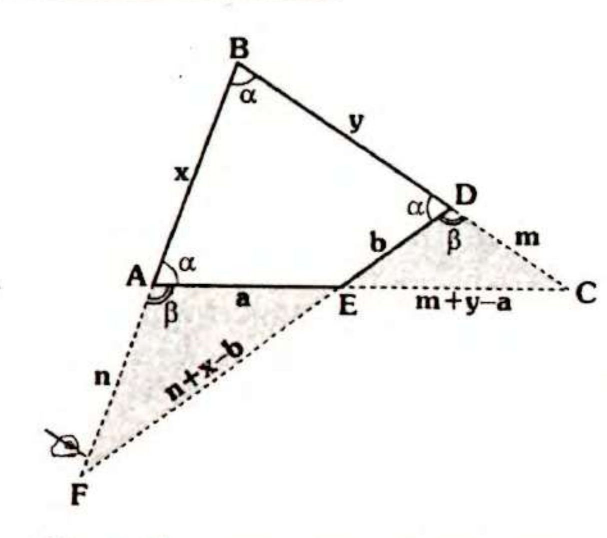
$\triangle MBP$ isósceles $\Rightarrow MB=BP=a$

$x+b=a$

$\therefore\ \mathbf{x=a-b}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 143



- Nos piden entre que valores está: xy
- ΔBDF y ΔABC : isósceles

$$\Rightarrow BC = AC \quad y \quad BF = DF$$

- En ΔFAE y ΔEDC :

  Como $\alpha < 90° \Rightarrow \beta > 90°$, luego EF y EC son las longitudes de los mayores lados.

  $\cdot\ n + x - b > n \Rightarrow x > b \quad \ldots (I)$

  $.\ m + y - a > m \Rightarrow y > a \quad \ldots (II)$

- De (I) y (II): $\quad xy > ab \quad \ldots (\alpha)$

- Por existencia de Δ_s :

  En ΔEAF : $n + x - b < n + a$

  $\Rightarrow x < a + b \quad \ldots (III)$

  En ΔEDC : $m + y - a < m + b$

  $\Rightarrow y < a + b \quad \ldots (IV)$

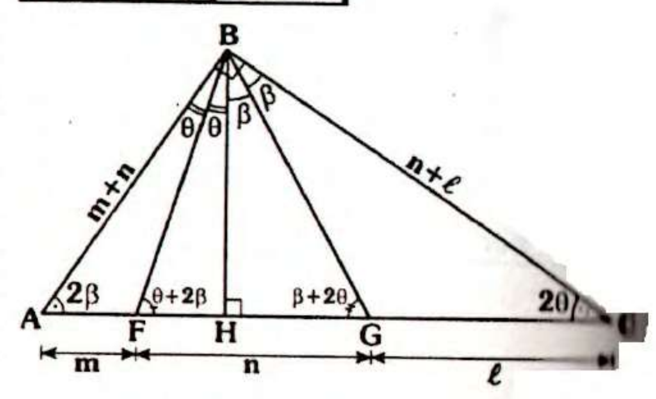
- De (III) y (IV): $\quad xy < (a + b)^2 \quad \ldots (\beta)$

- De (α) y (β) :

$$\mathbf{ab < xy < (a + b)^2}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 144



- Nos piden la relación entre m, n, ℓ
- Por teorema

$$m\measuredangle BAC = m\measuredangle HBC = 2\beta$$
$$m\measuredangle ACB = m\measuredangle HBA = 2\theta$$

$\Rightarrow$ ΔABG y ΔFBC : isósceles

$$AB = AG = m + n$$
$$FC = CB = n + \ell$$

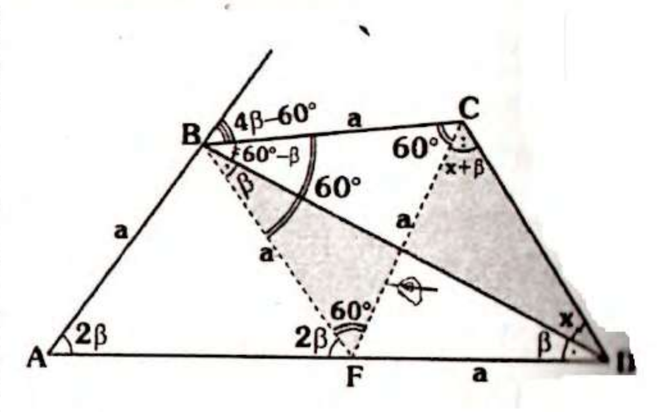
- Por T. de pitágoras:

$$(m + n + \ell)^2 = (m + n)^2 + (n + \ell)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{2m\ell = n^2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 145



- Piden: x
- Como $m\measuredangle BAD = 2(m\measuredangle ADB) \Rightarrow$ trazamos $\overline{BF}$ tal que $m\measuredangle FBD = \beta \Rightarrow \Delta ABF$ y ΔFBD isósceles $\Rightarrow AB = BF = FD = a$

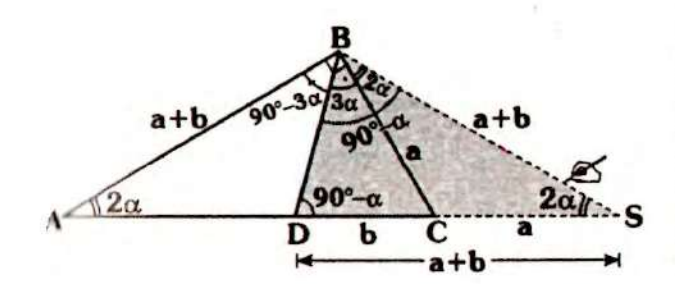
- Como FB=BC es equilátero $\Rightarrow FC = a$
- Luego el ΔFCD es isósceles
- En la parte sombreada ( ):

$$x + x + \beta = 60^\circ + \beta$$

$$\therefore \mathbf{x = 30^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 146



- Piden: $m\sphericalangle BAC$
- Como:

$m\sphericalangle BAC = 2\alpha$ y $m\sphericalangle BDC = 90^\circ - \alpha$

- De acuerdo a los criterios sobre trazos auxiliares: se prolonga $\overline{AC}$ y se traza $\overline{BS}$ tal que: $m\sphericalangle BSA = 2\alpha \Rightarrow \Delta ABS$ y ΔDBS son isósceles

$$\Rightarrow AB = BS = DS = a + b$$

- Como $CD = b \Rightarrow CS = a$

$$\Rightarrow \Delta BCS \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle CBS = m\sphericalangle BSC = 2\alpha$$

- En ΔABS:

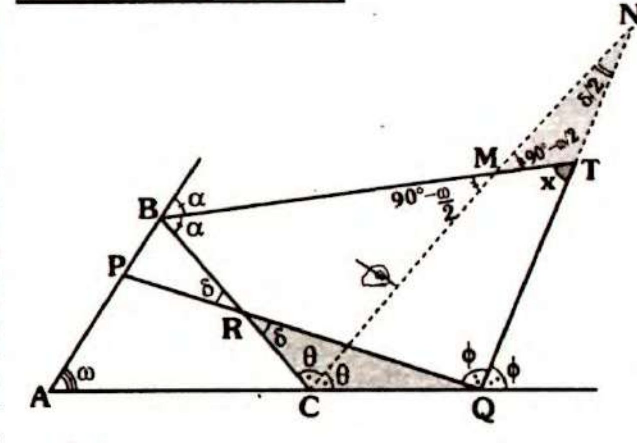
$$2\alpha + 2\alpha + 2\alpha + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 30^\circ$$

$$\therefore \mathbf{m\sphericalangle BAC = 30^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 147



- Piden: x
- Dato: $\omega - \delta = 20^\circ$
- Se traza $\overline{CN}$ bisectriz del $\sphericalangle RCQ$, por ángulo entre bisectrices en los triángulos RCQ y ABC:

$$m\sphericalangle CNQ = \frac{\delta}{2}$$

$$m\sphericalangle BMC = 90^\circ - \frac{\omega}{2}$$

- En ΔMNT:

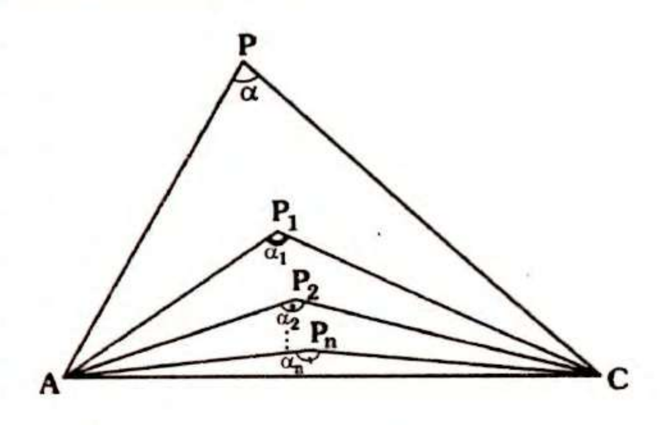
$$x = 90^\circ - \frac{\omega}{2} + \frac{\delta}{2}$$

$$\Rightarrow x = 90^\circ - \frac{(\omega - \delta)}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = 80^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 148



- Nos piden: α_n
- Usando el teorema 25:

- En ΔAPC: $\alpha_1 = 90° + \frac{1}{2}\alpha$

- En ΔAP_1C: $\alpha_2 = 90° + \frac{1}{2}\alpha_1$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 90° + \frac{1}{2}\left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right)$$

- En ΔAP_2C: $\alpha_3 = 90° + \frac{1}{2}\alpha_2$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 90° + \frac{1}{2}\left[90° + \frac{1}{2}\left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right)\right]$$

- En $\Delta AP_{n-1}C$:

$$\alpha_n = 90° + \frac{1}{2}\left\{90° + \dots \frac{1}{2}\left(90° + \frac{1}{2}\alpha\right)\dots\right\}$$

- Analizando por partes:

$$\alpha_n = \underbrace{90° + \frac{1}{2}90° + \frac{1}{2^2}90° + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}90°}_{E} + \frac{1}{2^n}\alpha$$

- Hallemos E, asi:

$$E = 90° + \frac{1}{2}90° + \frac{1}{2^2}90° + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}90°$$

$$E = 90°\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Observación

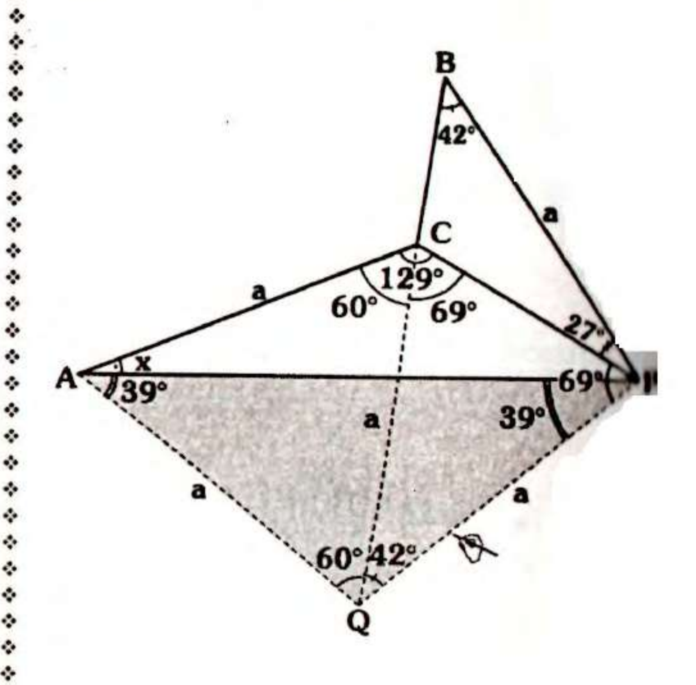
$$\frac{1-a^{k+1}}{1-a} = 1 + a + a^2 + \dots + a^k \; ; k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow E = 90°\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \quad \Rightarrow E = 180°\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\therefore \; \boldsymbol{\alpha_n = 180°\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \frac{1}{2^n}\alpha}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 149



- Piden: x

- Dato: AC = BP

- Se prolonga $\overline{BC}$ (con ello se tendrá $m\measuredangle PBC = 42°$ y $m\measuredangle PCQ = 69°$, las medidas corresponden al tercer criterio de trazos auxiliares).

- Se traza $\overline{PQ}$ tal que $m\measuredangle PQB = 42°$

$$\Rightarrow \Delta BPQ \text{ y } \Delta BCQ \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow PQ = QC = PB = a$$

- Como $m\measuredangle ACQ = 60°$ y

$AC = CQ \Rightarrow \Delta QCA$ es equilátero

$AQ = QP = a \Rightarrow \Delta AQP$ es isósceles

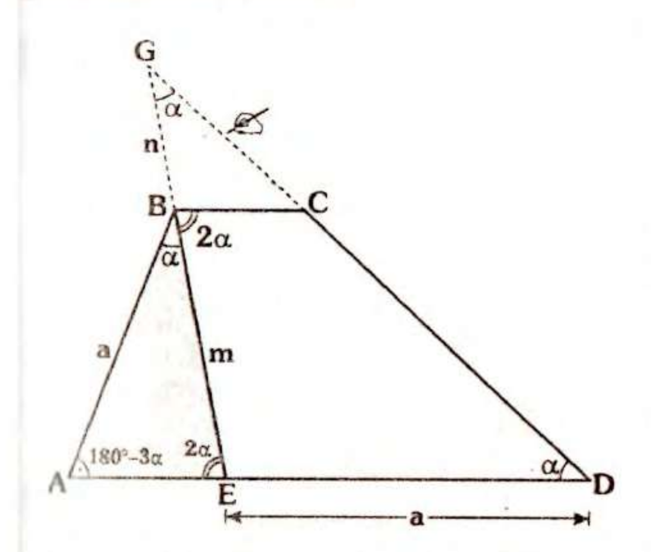
$$\Rightarrow m\measuredangle QAP = m\measuredangle QPA = 39°$$

$$\Rightarrow x + 39° = 60°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 21°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 150



- Nos piden el menor valor entero de α
- Las prolongaciones de $\overline{EB}$ y $\overline{DC}$ se cortan en G.
- Como $m\sphericalangle AEB = 2\alpha$ y

$$m\sphericalangle EDG = \alpha \Rightarrow m\sphericalangle EGD = \alpha$$

$\Rightarrow \triangle EGD$ es isósceles $\Rightarrow m + n = a$

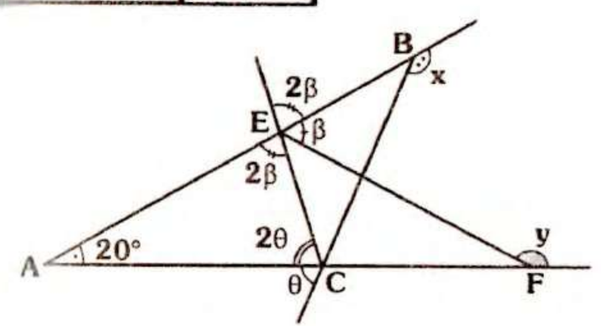
- Se puede asegurar : $a > m$
- En $\triangle ABE$, por teorema de la correspondencia:
- Como $a > m \Rightarrow 2\alpha > 180° - 3\alpha$

$$\Rightarrow \alpha > 36°$$

$$\therefore \ \alpha_{(\text{menor entero})} = \mathbf{37°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 151



Nos piden: $x + y$

Por teorema 7:

$$\triangle ABC: \ x + \theta = 180° + 20° \quad \ldots \text{(I)}$$

$$\triangle AEF: \ y + \beta = 180° + 20° \quad \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II):

$$x + y + \theta + \beta = 400° \quad \ldots \text{(III)}$$

- En $\triangle AEC$: $2\theta + 2\beta + 20° = 180°$

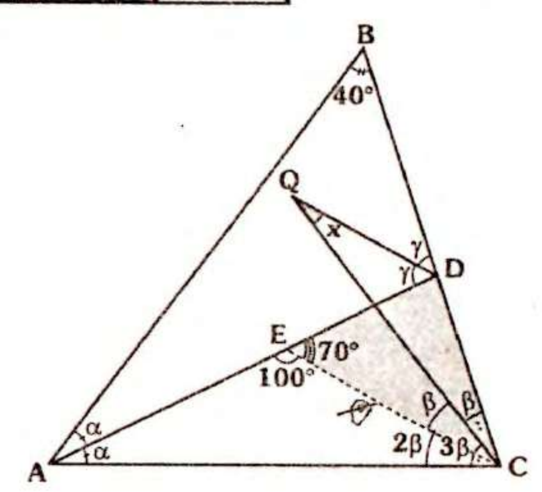
$$\Rightarrow \theta + \beta = 80°$$

- En (III): $x + y + 80° = 400°$

$$\therefore \ \mathbf{x + y = 320°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 152



- Piden: x
- Se traza $\overline{CE}$ tal que $m\sphericalangle ECQ = \beta$

$\Rightarrow m\sphericalangle ECA = 2\beta$, con ello se tendrá que $\overline{CE}$ es bisectriz del ángulo ACB.

- Por ángulo entre bisectrices, en: $\triangle ABC$, por teorema 25:

$$m\sphericalangle AEC = 90° + \frac{40°}{2} = 110°$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle CED = 70°$$

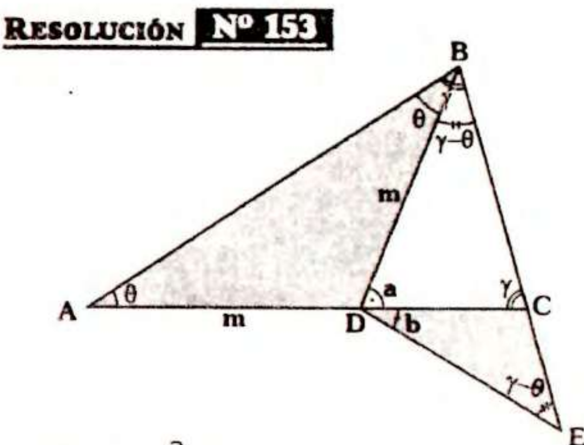
$\triangle DEC$: por teorema 27:

$$x = \frac{70°}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 35°}$$

Clave D

Resolución N° 153



- Piden: $\dfrac{a}{b}$
- Dato: AD=DB=DE

$\Rightarrow \Delta ABD$ y ΔDCE son isósceles

- Por ángulo exterior, en:

$\Delta ABD: a=\theta+\theta \Rightarrow a=2\theta$

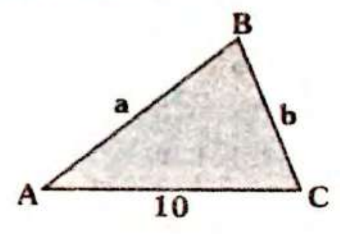
$\Delta DCE: \; b+\gamma-\theta=\gamma \Rightarrow b=\theta$

$$\Rightarrow \; \frac{a}{b}=\frac{2\theta}{\theta}$$

$$\therefore \; \frac{a}{b}=2$$

Clave D

Resolución N° 154



- Piden el menor valor entero del perímetro:

$$\text{Perím}_{\blacktriangle ABC}=10+a+b$$

- Por existencia:

$$a+b>10$$

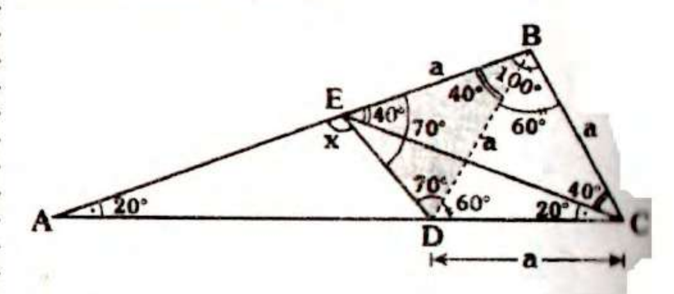
$$\Rightarrow \quad \underbrace{a+b+10}_{\text{perím}_{(\blacktriangle ABC)}}>10+10$$

$$\Rightarrow \; \text{Perím}_{(\blacktriangle ABC)}>20$$

- Por lo tanto el menor valor entero de perímetro es **21**.

Clave E

Resolución N° 155



- Piden: x

ΔAEC : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle EAC=m\measuredangle ECA=20°$

ΔEBC : isósceles $\Rightarrow EB=BC=a$

- Se tiene :

$BC=CD=a \quad y \quad m\measuredangle BCD=60°$

$\Rightarrow \Delta DBC$ es equilátero

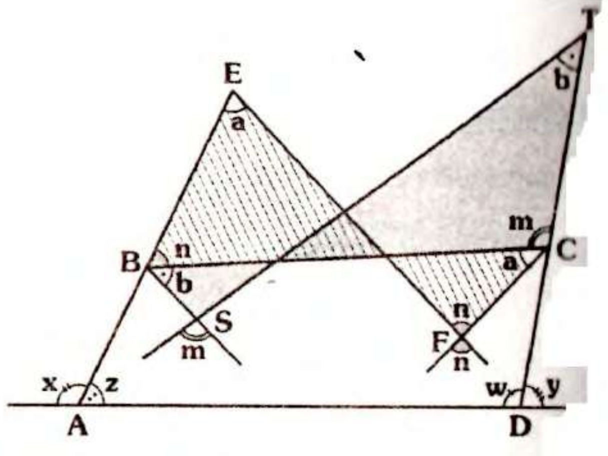
$\Rightarrow DB=a \Rightarrow \Delta EBD$ isósceles

- Luego: $m\measuredangle BED=m\measuredangle EDB=70°$

$$\therefore \; \mathbf{x=110°}$$

Clave E

Resolución N° 156

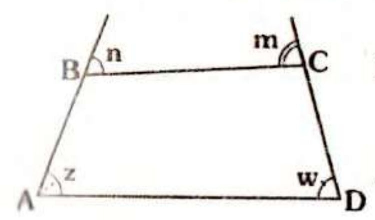


- Piden: m+n
- Dato: $x+y=220°$

- En ⋈BSTC y ⋈BECF, por teorema 5, se tendrá:

$$m\measuredangle EBC = n \quad y \quad m\measuredangle \quad = m$$

- Como: $x + y = 220° \Rightarrow z + \omega = 140°$



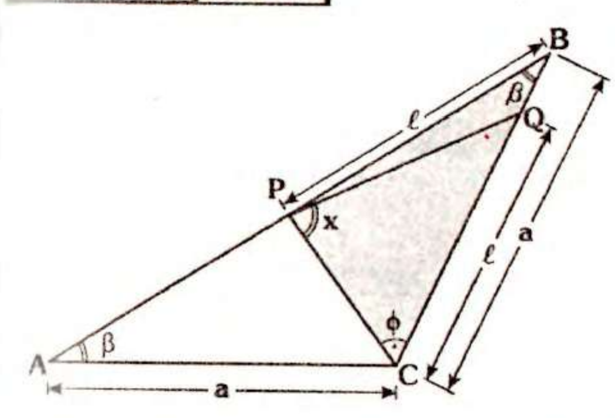
Del gráfico:

$$m + n = z + \omega$$

$$\therefore\ \mathbf{m + n = 140°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 157



- Nos pide el menor valor entero de x
- Como $CQ = PB \Rightarrow a > \ell$
- En ΔPCB, por teorema de la correspondencia:

$$x > \phi \quad ... \text{(I)}$$

- En ΔAPC: $\quad x > \beta \quad ...\text{(II)}$
- Sumando (I) y (II):

$$2x > \beta + \phi$$

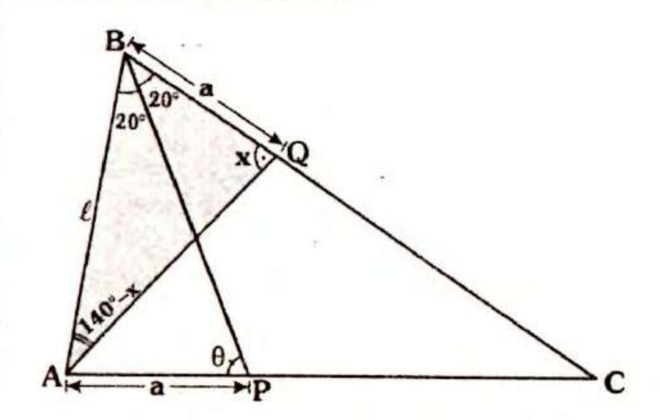
$$\Rightarrow x + 2x > \underbrace{\beta + \phi + x}_{180°}$$

$$\Rightarrow x > 60°$$

$$\therefore\ \mathbf{x_{(menor\ entero)} = 61°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 158



- Piden el menor valor entero de x
- En ΔPBC: $\theta > 20°$
- En ΔABP: como $\theta > 20° \Rightarrow \ell > a$
- En ΔABQ:

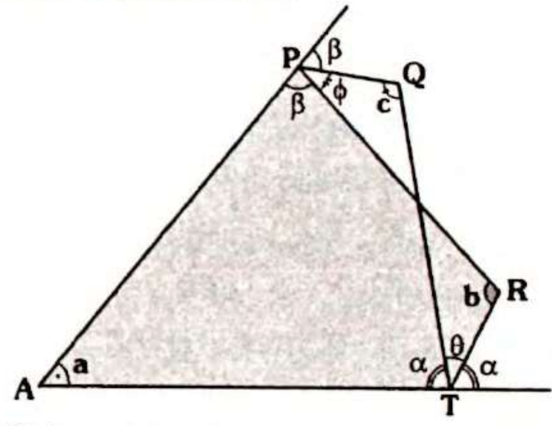
$$\ell > a \Rightarrow x > 140° - x$$

$$\Rightarrow x > 70°$$

$$\therefore\ \mathbf{x_{(menor\ entero)} = 71°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 159



- Piden: $m + n + p$
- Dato: $ma + nb + pc = 360°$
- En ⌂APRT y ⌂APQT, por teorema 8:

$$. \ a + b = \alpha + \beta + \phi$$

$$. \ a + c = \alpha + \theta + \beta$$

$$\Rightarrow \quad 2a + b + c = \underbrace{(2\alpha + \theta)}_{180^\circ} + \underbrace{(2\beta + \phi)}_{180^\circ}$$

$$\Rightarrow \quad 2a + b + c = 360^\circ$$

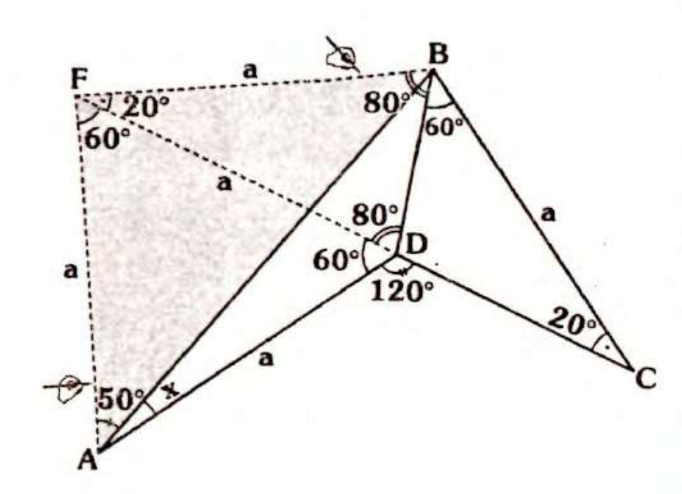
- Del dato: $ma + nb + pc = 2a + b + c$

$$\Rightarrow m = 2\ ;\ n = 1 \ \text{y} \ \ p = 1$$

$$\therefore \ \mathbf{m + n + p = 4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 160



- Nos piden: x
- Se prolonga $\overline{CD}$ y se traza $\overline{BF}$ tal que $m\sphericalangle BFC = 20^\circ \Rightarrow \Delta BFC$ y ΔBFD : isósceles $\Rightarrow FB = FD = BC = a$
- $FD = DA = a$ y $m\sphericalangle FDA = 60^\circ \Rightarrow \Delta AFD$ es equilátero $\Rightarrow$ $AF = a$ y se tendrá $AF = FB$ y $m\sphericalangle AFB = 80^\circ$

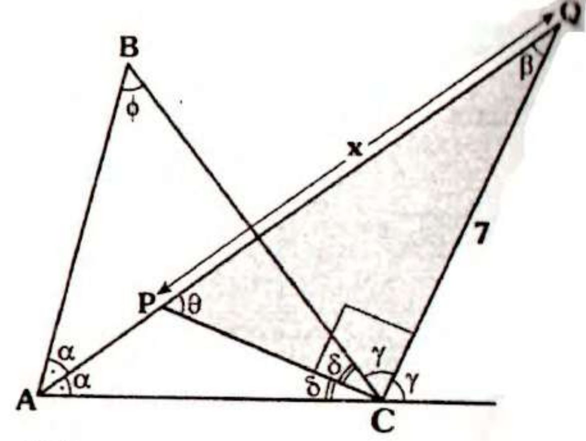
$$\Rightarrow \ m\sphericalangle FAB = m\sphericalangle FBA = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \quad x + 50^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 10^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 161



- Piden: x
- Datos: "a" toma su mayor valor entero y el ΔABC es acutángulo.
- Por ángulo entre bisectrices (*teorema 27*)

$$\beta = \frac{\phi}{2}$$

- Como ΔABC es acutángulo $\Rightarrow \phi < 90^\circ$

$$\Rightarrow \ \beta < 45^\circ$$

- En el ◺PCQ se tendrá: $\theta + \beta = 90^\circ$

$$\Rightarrow \theta > 45^\circ \Rightarrow \theta > \beta$$

- Por teorema de la correspondencia

$$7 > a \Rightarrow a = 6 \ \ (\textit{del dato})$$

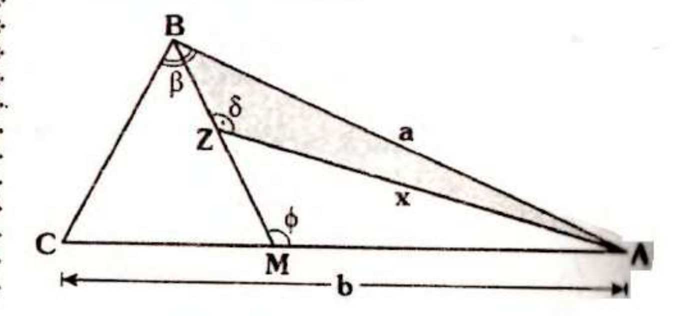
- En ◺PCQ:

$$x^2 = 7^2 + 6^2$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \sqrt{85}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 162



- Piden el mayor valor entero de x.
- Dato: $a + b = 10$

$$\beta > 90° \text{ y } \phi > 90°$$

- En ΔMZA: $\delta > \phi \Rightarrow \delta > 90°$
- En ΔBZA:

como $\delta > 90° \Rightarrow a > x$ ... (I)

- En ΔABC: $\beta > 90° \Rightarrow b > a$

$$\Rightarrow \underbrace{a+b}_{10} > a + a$$

$$5 > a \quad \text{... (II)}$$

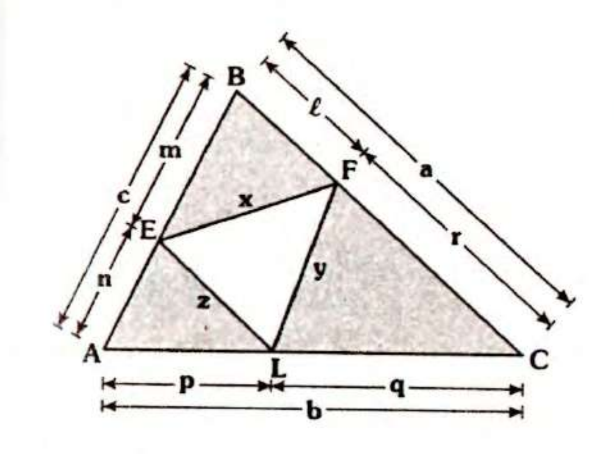
De (I) y (II): $x < a < 5$

$$\Rightarrow x < 5$$

$$\therefore \mathbf{x_{(mayor\ entero)} = 4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 163



- Piden el mayor valor del $\text{Perím}_{(\blacktriangle EFL)}$
- Dato: $\text{Perím}_{(\blacktriangle ABC)} = k$, $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow a + b + c = k$$

- *Por teorema de existencia en:*

$\Delta EBF: x < m + \ell$; $\Delta FCL: y < r + q$

$\Delta AEL: z < p + n$

$$\Rightarrow x + y + z < \underbrace{(m+n)}_{c} + \underbrace{(\ell + r)}_{a} + \underbrace{(p+q)}_{b}$$

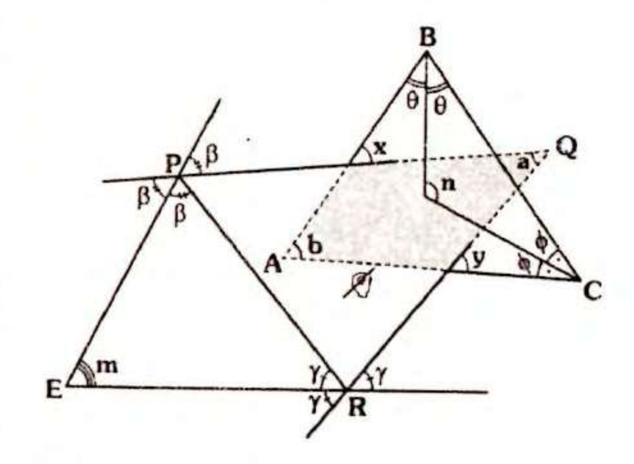
$$\Rightarrow x + y + z < a + b + c$$

$$\Rightarrow \text{Perím}_{(\blacktriangle EFL)} < k$$

- *Como k es entero, entonces el mayor valor entero del perímetro de* ▲EFL *es:* $\mathbf{k - 1}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 164



- Piden: $x + y$
- Dato: $n - m = 60°$
- En la región sombreada: $x + y = a + b$
- Por ángulo entre bisectrices, en:

$$\Delta PQR: \ m = 90° - \frac{a}{2} \quad \text{... (I)}$$

$$\Delta ABC: \ n = 90° + \frac{b}{2} \quad \text{... (II)}$$

- Restando (II) y (I):

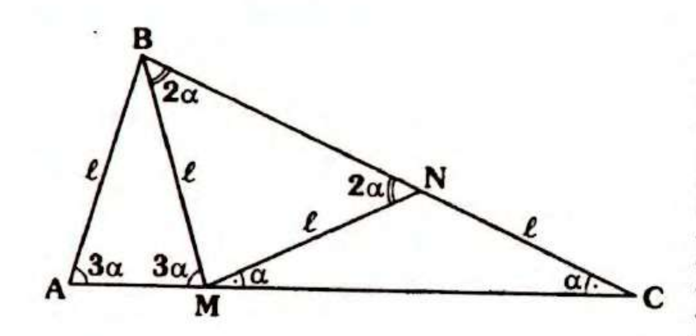
$$\underbrace{n - m}_{60°} = \frac{b + a}{2}$$

$$\Rightarrow a + b = 120°$$

$$\therefore \mathbf{x + y = 120°}$$

Clave C

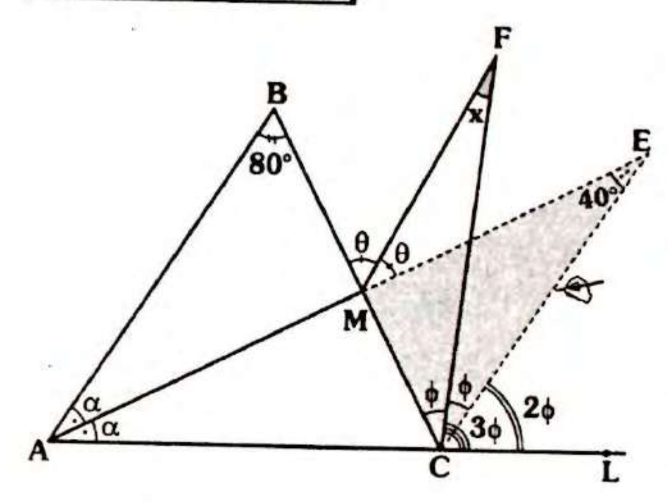
RESOLUCIÓN Nº 165



- Piden: m∢BAC
- Dato: α es máximo entero.
  ΔABM, ΔBNM y ΔMNC son isósceles.
- En ΔABM, del teorema 17:
  $$3\alpha < 90° \Rightarrow \alpha < 30°$$
- Como "α" es máximo y entero $\Rightarrow \alpha = 29°$.
- Luego: $m∢BAC = 3\alpha$
  $$\therefore \mathbf{m∢BAC = 87°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 166



- Piden: x
- Prolongamos $\overline{AM}$ y trazamos $\overline{CE}$ tal que $m∢FCE = \phi \Rightarrow m∢ECL = 2\phi$
- Por ángulo entre bisectrices (teorema 27) en:

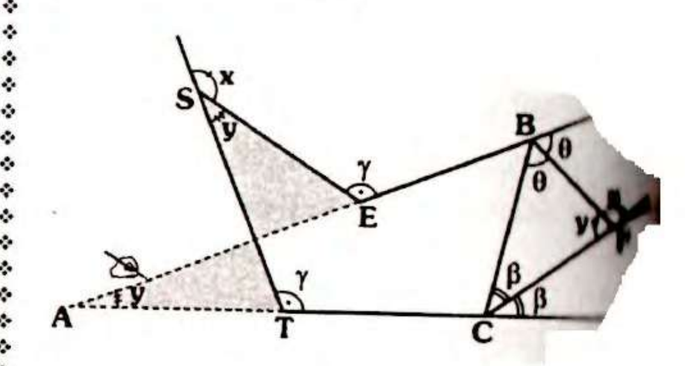
  ΔABC: $m∢AEC = \dfrac{80°}{2} = 40$

  ΔMEC: $x = \dfrac{40°}{2}$

  $$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave

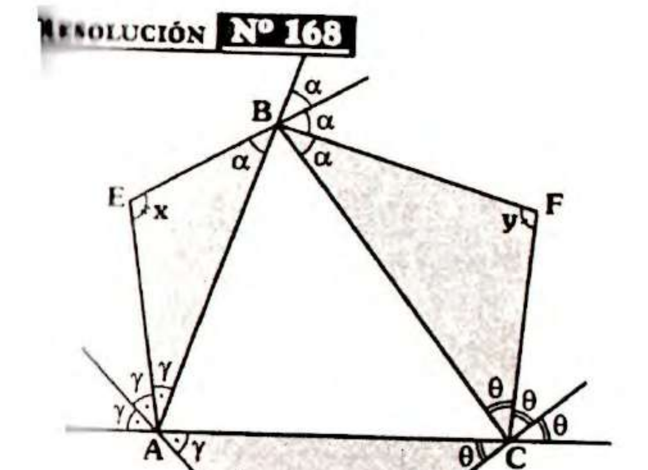
RESOLUCIÓN Nº 167



- Piden: x
- Se tiene: $x + y = 180°$ ... (I)
  $$\Rightarrow m∢BFC = m∢EST = y$$
- En la parte sombreada: $m∢EAT = y$
- En ΔABC por teorema 26 (*ángulo entre bisectrices*)
  $$y = 90° - \frac{y}{2} \Rightarrow y = 60°$$
- En (I):
  $$x + 60° = 180°$$
  $$\therefore \mathbf{x = 120°}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 168



- Piden: $x+y+z$
- En $\triangle AEB$, $\triangle BFC$ y $\triangle ACG$:

$$x+\alpha+\gamma=180°$$
$$y+\theta+\alpha=180°$$
$$z+\theta+\gamma=180°$$
$$\Rightarrow x+y+z+2(\theta+\gamma+\alpha)=540° \quad \ldots \text{(I)}$$

- En $\triangle ABC$, por teorema 3:

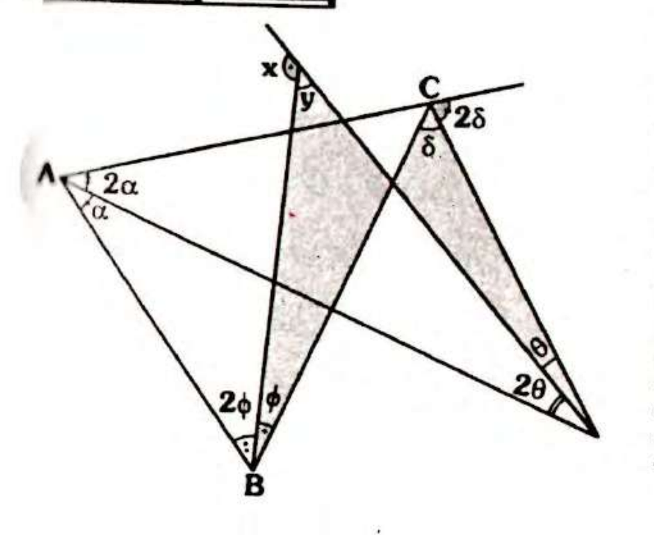
$$3\gamma+3\theta+3\alpha=360° \Rightarrow \gamma+\theta+\alpha=120°$$

- En (I):

$$x+y+z+2(120°)=540°$$
$$\therefore\ \mathbf{x+y+z=300°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 169



- Nos piden: x
- Dato: $\theta+\alpha=25°$
- Del gráfico: $x-y=180°$
- En $\triangle ABC$, por ángulo exterior:

$$3\delta=3\alpha+3\phi \Rightarrow \delta=\alpha+\phi \quad \ldots \text{(I)}$$

- En la parte sombreada ($\bowtie$):

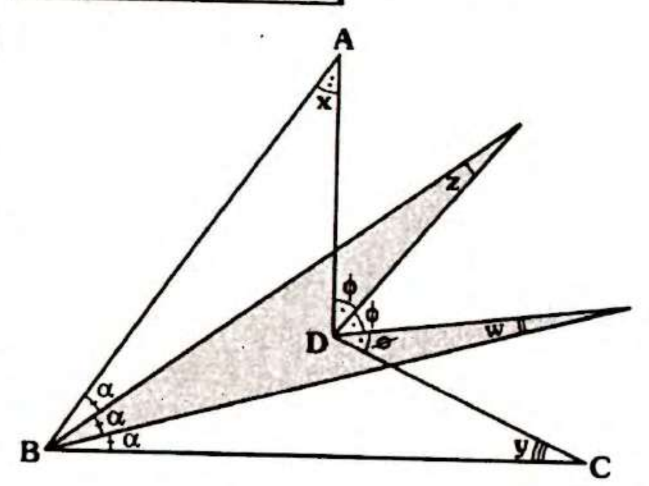
$$y+\phi=\delta+\theta$$

- De (I): $y+\not\phi=\alpha+\not\phi+\theta$

$$\Rightarrow y=\alpha+\theta \Rightarrow y=25°$$
$$\therefore\ \mathbf{x=155°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 170



- Piden: $\dfrac{x+y}{z+w}$
- En la parte sombreada:

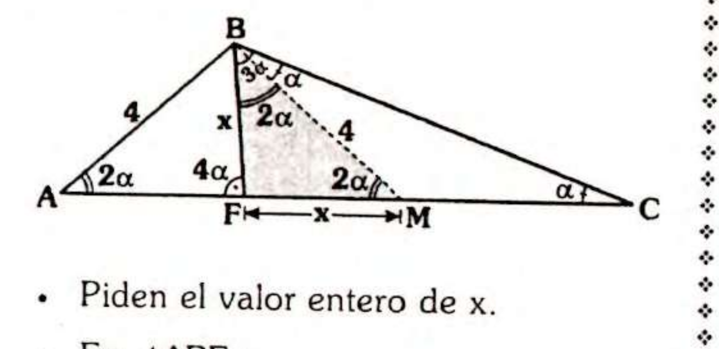
$$z+\omega+\alpha=\phi \Rightarrow z+\omega=\phi-\alpha$$

- En $\measuredangle ABCD$: $x+y+3\alpha=3\phi$

$$\Rightarrow x+y=3(\phi-\alpha)$$
$$\Rightarrow \frac{x+y}{z-\omega}=\frac{3(\phi-\alpha)}{\phi-\alpha}$$
$$\therefore\ \mathbf{\frac{x+y}{z+\omega}=3}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 171



- Piden el valor entero de x.
- En ΔABF:

$$m\sphericalangle BAF < m\sphericalangle AFB \Rightarrow x < 4 \qquad ...(I)$$

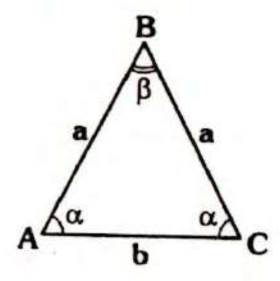
- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\sphericalangle MBC = \alpha$
  $\Rightarrow \Delta MBC$, ΔFBM y ΔABM isósceles
  $\Rightarrow BM = 4$ y $FM = x$
- En ΔFBM:

$$4 < x + x \Rightarrow 2 < x \qquad ...(II)$$

- De (I) y (II): $2 < x < 4$
- Por lo tanto el valor entero de x es **3**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 172



- Nos piden la medida del mayor valor entero del menor ángulo interior.
- Dato: $\text{Perím}_{(\blacktriangle ABC)} > 3b$
- Averiguemos ahora quien es el menor ángulo interior.
- Del dato: $2a + b > 3b \Rightarrow a > b$
- Por teorema de la correspondencia

$$\alpha > \beta$$

- Es decir nos piden β, tal que sea mayor entero.
- Como: $\alpha > \beta \Rightarrow 2\alpha > 2\beta$

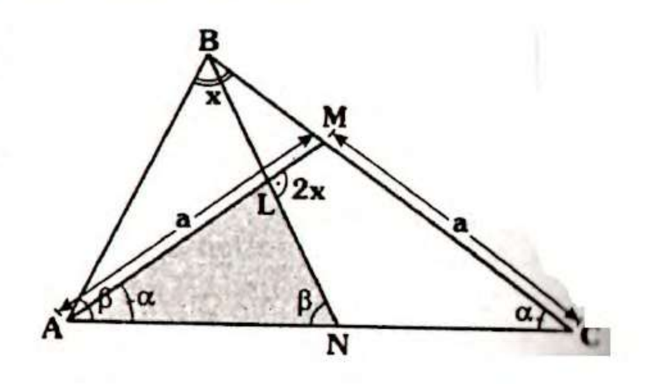
$$\Rightarrow \underbrace{2\alpha + \beta}_{180^\circ} > 2\beta + \beta$$

$$\Rightarrow 60^\circ > \beta$$

- Por lo tanto la medida del mayor valor entero de β es **59°**.

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 173



- Nos piden: x
- Dato: $AB = BN$ y $AM = MC$
  ΔABM y ΔAMC : isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAN = m\sphericalangle ANB = \beta$$

$$m\sphericalangle MAC = m\sphericalangle ACM = \alpha$$

- En ΔABC:

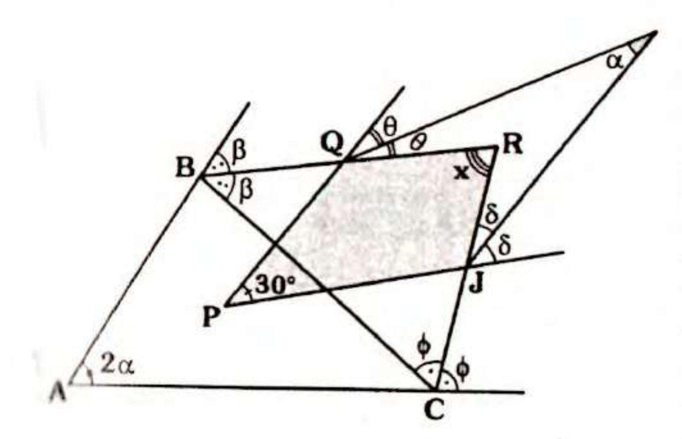
$$x + \alpha + \beta = 180^\circ \qquad ...(I)$$

- En ΔALN: $\alpha + \beta = 2x$
- En (I): $x + 2x = 180^\circ$

$$\therefore \mathbf{x = 60^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 174



- En $\triangle ABC$, por ángulo entre bisectrices (teorema 26):

$$x = 90° - \frac{(2\alpha)}{2} \Rightarrow x + \alpha = 90° \quad \dots (I)$$

- En la región sombreada, por teorema 31:

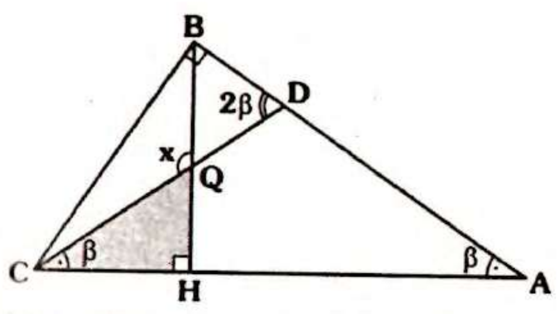
$$\alpha = \frac{x - 30°}{2} \quad \dots (II)$$

$$x + \frac{x - 30°}{2} = 90°$$

$$\therefore \mathbf{x = 70°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 175



- Nos piden el mayor valor entero de x.
- Por dato: AD=CD

$\Rightarrow \triangle CDA$: isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle DCA = m\sphericalangle DAC = \beta$

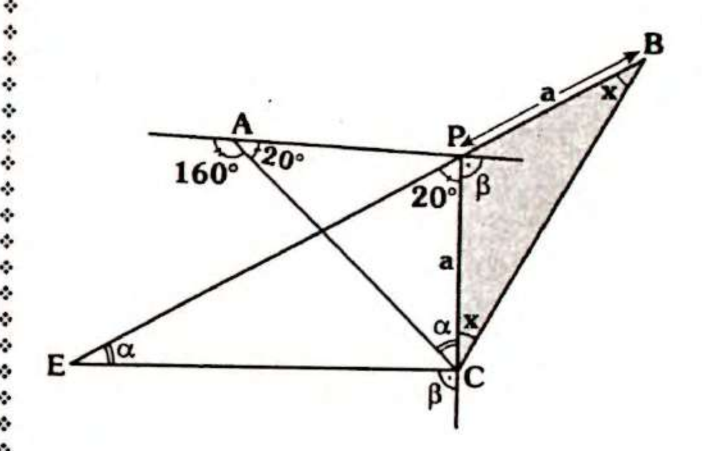
- En $⊿DBC$: $2\beta < 90° \Rightarrow \beta < 45°$ ... (I)
- En $⊿CHQ$: $x = 90° + \beta$
- De (I): $\beta < 45 \Rightarrow \underbrace{90° + \beta}_{x} < 45° + 90°$

$\Rightarrow x < 135°$

- Por lo tanto el mayor valor entero de x es **134°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 176



- Piden: x
- Por dato:

$$PB = PC \Rightarrow m\sphericalangle PCB = x$$

- En $\triangle PAC$: $\beta = \alpha + 20°$
- En $\triangle EPC$: $m\sphericalangle CPE + \alpha = \beta$

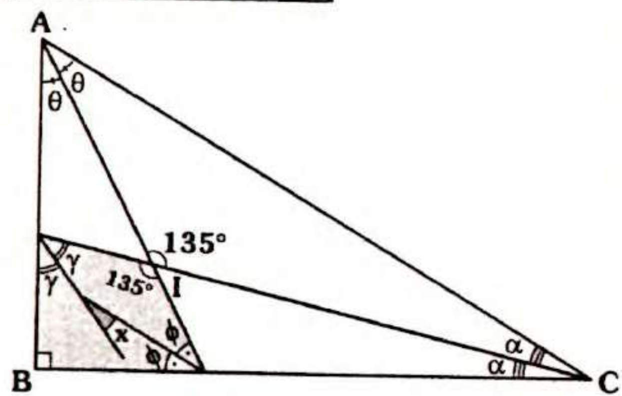
$$\Rightarrow m\sphericalangle CPE = 20°$$

- En $\triangle CBP$: $x + x = 20°$

$$\therefore \mathbf{x = 10°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 177



- Piden: x
- En ◺ABC, por ángulo entre bisectrices (*teorema* 25)

$$m\measuredangle AIC = 90° + \frac{90°}{2} = 135°$$

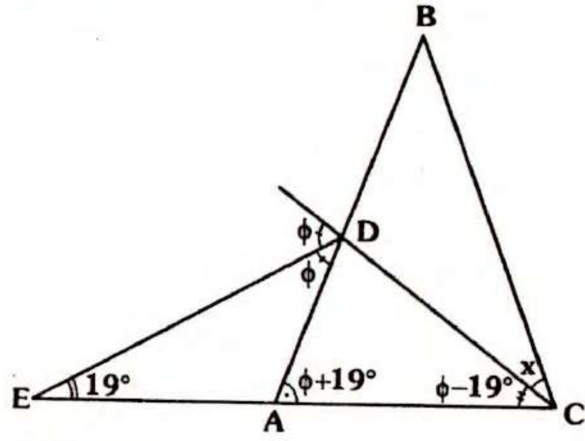
- En la región sombreada, por teorema 32.

$$x = \frac{135° - 90°}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{45°}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 178



- Piden: x
- Dato: AB=BC
- Por ángulo exterior en:

$$\Delta EDA : m\measuredangle DAC = \phi + 19°$$

$$\Delta EDC : m\measuredangle DCE = \phi - 19°$$

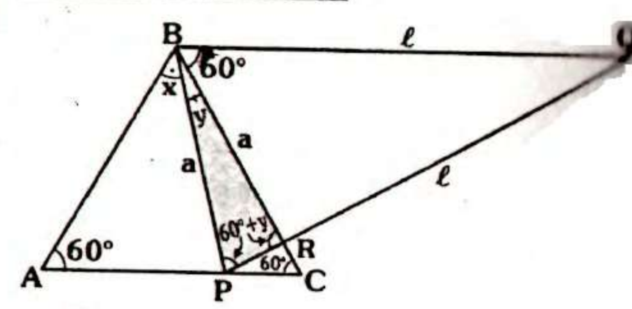
- Como AB = BC ⇒ $m\measuredangle ACB = m\measuredangle BAC$

$$x + \not{\phi} - 19° = \not{\phi} + 19°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 38°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN N° 179



- Piden: x
- Dato: PB=BR; BQ=PC y $\overline{BQ} // \overline{PC}$

$$\Delta ABC : \text{equilátero} \Rightarrow x + y = 60°$$

- Por ángulos alternos: $m\measuredangle CBQ = 60°$

$$\Delta PBQ \text{ y } \Delta PBR : \text{isósceles}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle QBP = m\measuredangle BPQ = m\measuredangle PRB = 60° + y$$

- En ΔPBR:

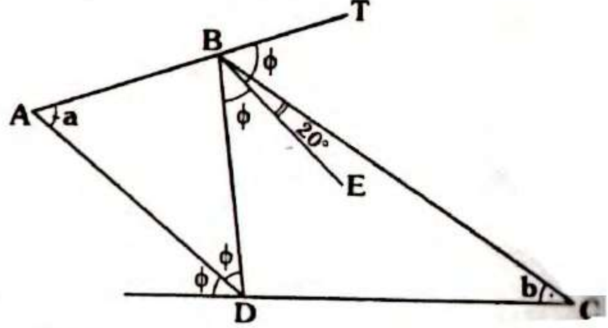
$$60° + y + 60° + y + y = 180°$$

$$\Rightarrow y = 20°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 40°}$$

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN N° 180



- Piden: a − b
- Dato: $\overline{BE} // \overline{AD}$ y $m\measuredangle EBT = m\measuredangle EBD$

- Por ángulos alternos internos:

$$m\measuredangle EBD = \phi$$

- Por ángulos correspondientes:

$$a = \phi$$

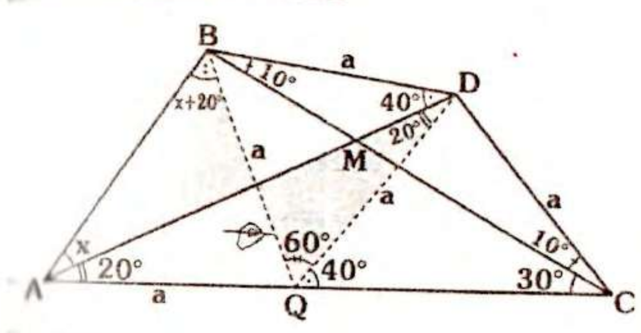
- En ΔDBC, por ángulo exterior

$$2a = a + 20° + b$$

$$\therefore\ \mathbf{a - b = 20}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 181



- Piden: x
- Como $m\measuredangle DCA = 2(m\measuredangle DAC)$ se traza $\overline{DQ}$ tal que $m\measuredangle ADQ = 20° \Rightarrow \Delta ADQ$ y ΔQDC son isósceles:

$$\Rightarrow AQ = QD = DC = a$$

- Se tiene entonces: $m\measuredangle QDB = 60°$ y $DQ = DB \Rightarrow \Delta DQB$ es equilátero

$\Rightarrow QB = QA \Rightarrow m\measuredangle QAB = m\measuredangle ABQ = x + 20°$

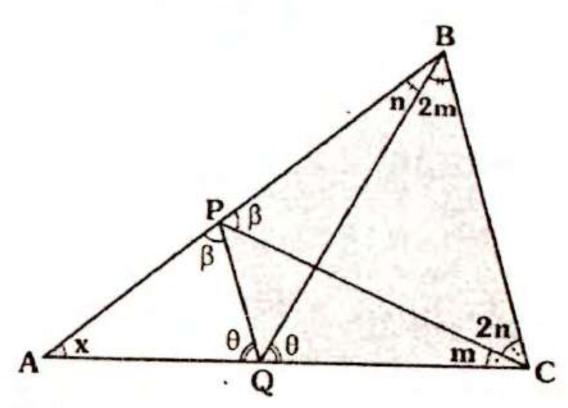
- En la parte sombreada ($\nearrow\!\!\!\!\!\!\nearrow$):

$$x + x + 20° = 60° + 20°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 182



- Piden: x
- En ΔABC:

$$x + 3(m+n) = 180° \qquad \ldots (a)$$

- En ⌂CQPB, por teorema 8:

$$\beta + \theta = 3(m+n) \qquad \ldots (I)$$

- En ΔQBC y ΔPBC:
  - $\theta + 3m + 2n = 180°$
  - $\beta + 2m + 3n = 180°$

$$\Rightarrow \underbrace{\theta + \beta}_{3(m+n)} + 5(m+n) = 360°$$

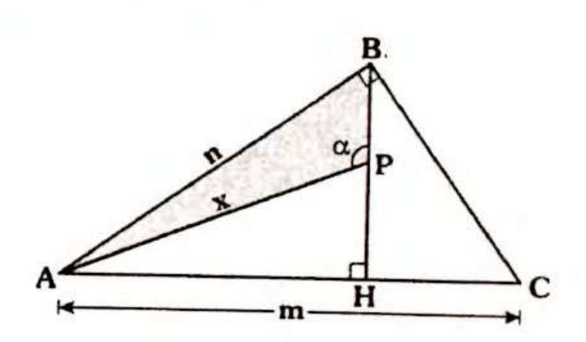
$$\Rightarrow m + n = 45°$$

- En (a): $x + 3(45°) = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 45°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 183



- Piden el mayor valor entero de x
- Dato: $m + n = 10$
- En ◺ AHP : $\alpha > 90° \Rightarrow n > x$ ... (I)
- En ◺ABC: $n < m \Rightarrow 2n < \underbrace{n+m}_{10}$

$\Rightarrow n < 5$ ... (II)

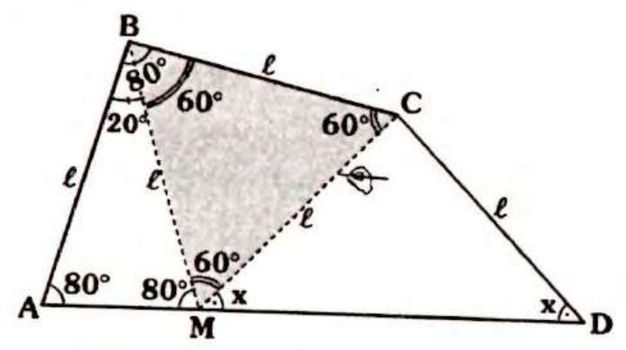
- De (I) y (II): $x < n$ y $n < 5$

$\Rightarrow x < 5$

- El mayor valor entero de x es **4**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 184



- Piden: x
- Datos: $AB = BC = CD$
- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\measuredangle ABM = 20°$

$\Rightarrow \triangle ABM$: isósceles $\Rightarrow MB = \ell$

- Como $MB = BC$ y $m\measuredangle MBC = 60°$, al trazar $\overline{MC}$ se tendrá que el: $\triangle MBC$ es equilátero

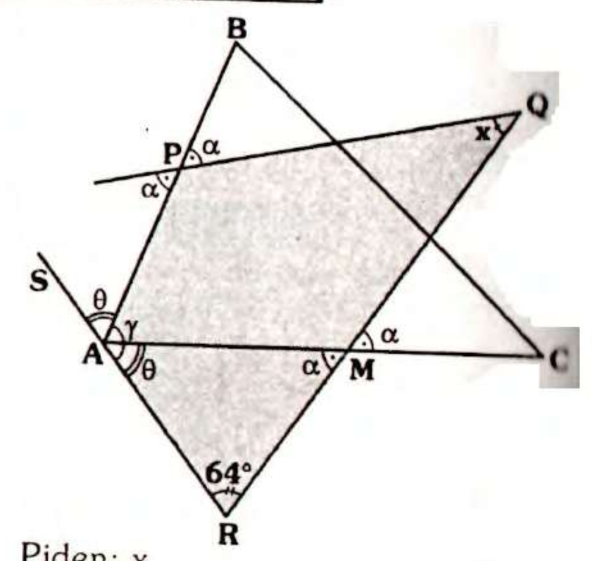
$\triangle MCD$ es isósceles $\Rightarrow m\measuredangle CMD = x$

$\Rightarrow x + 140° = 180°$

$\therefore \mathbf{x = 40°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 185



- Piden: x
- Dato: $\theta + \gamma = 180°$
- Al prolongar $\overline{RA}$, se tendrá:

$m\measuredangle BAS = \theta$

- En $\triangle AMR$: $\alpha + \theta + 64° = 180°$

$\Rightarrow \alpha + \theta = 116°$

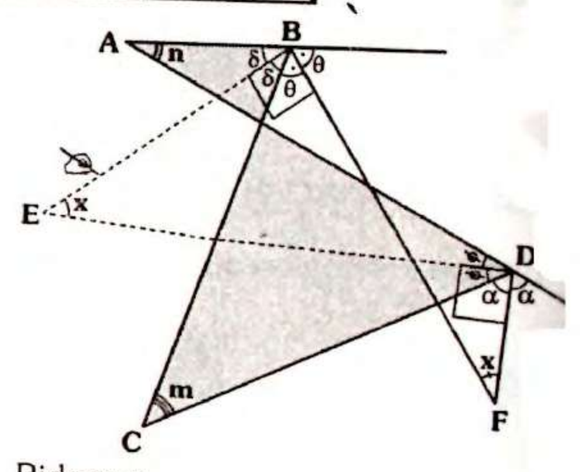
- En ⏢QRAP, por teorema 8:

$x + 64° = \underbrace{\alpha + \theta}_{116°}$

$\therefore \mathbf{x = 52°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 186



- Piden: x
- Dato: $m + n = 60°$

- Se trazan las bisectrices de los ángulos ABC y ADC.

$\Rightarrow m\sphericalangle EBF = m\sphericalangle EDF = 90°$

$\Rightarrow m\sphericalangle BED = x$

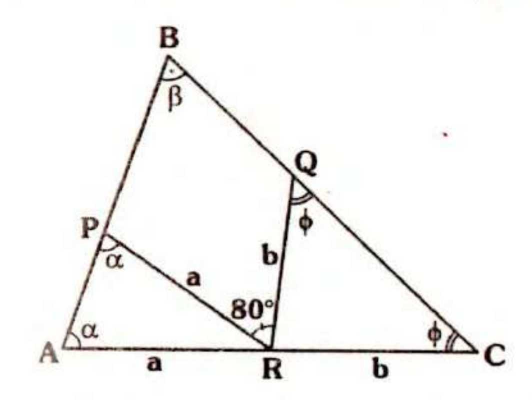
- Por teorema 28: $x = \dfrac{m+n}{2}$

$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$

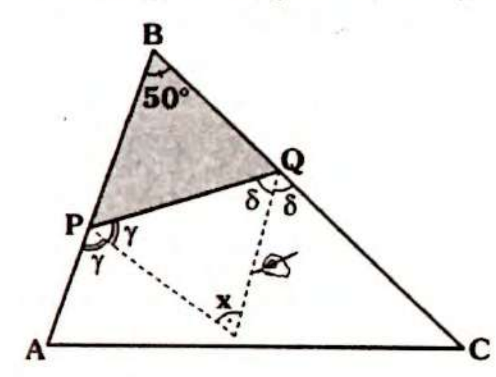
Clave B

RESOLUCIÓN Nº 187

Analicemos este problema por partes:



- $\triangle ABC$: $\alpha + \phi + \beta = 180°$ ... (I)
- En ⏢RPBQ: $\alpha + \phi = \beta + 80°$
- En (I): $\beta + 80 + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 50°$



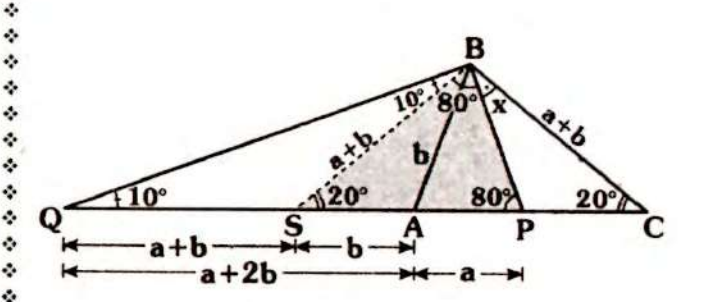
- Piden: x
- Por ángulo entre bisectrices:

$$x = 90° - \frac{50°}{2}$$

$\therefore\ \mathbf{x = 65°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 188



- Piden: x
- Se traza $\overline{BS}$ tal que $m\sphericalangle QBS = 10°$

$\Rightarrow \Delta QSB$ y ΔSBS : isósceles

$\Rightarrow QS = SB = BC = a + b$

- Como:

$QA = a + 2b \Rightarrow SA = b \Rightarrow SP = a + b$

$\Rightarrow \Delta SPB$: isósceles

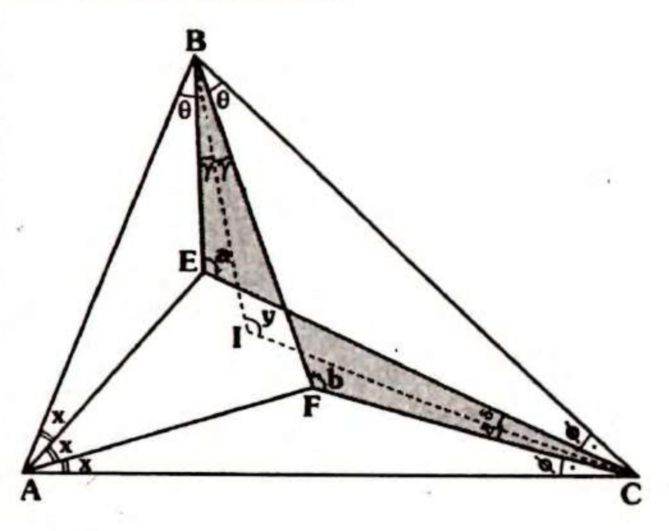
$\Rightarrow m\sphericalangle SBP = m\sphericalangle SPB = 80°$

- En ΔBPC: $x + 20° = 80°$

$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 189



- Piden: x
- Dato: $a + b = 210°$

- Se trazan las bisectrices de los ángulos EBF y FCE, las cuales también son bisectrices de los ángulos ABC y ACB.
- Por teorema 28:

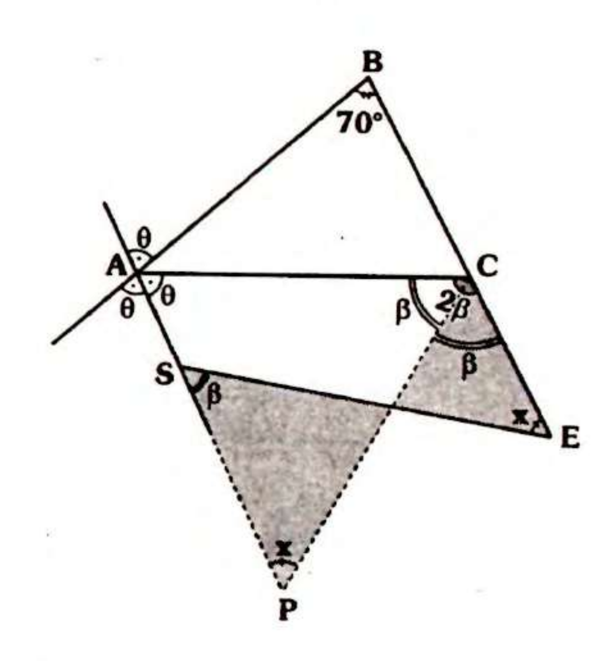
$$y=\frac{a+b}{2}\Rightarrow \mathbf{y=105°}$$

- Por teorema 25:

$$y=90°+\frac{3x}{2}\Rightarrow \mathbf{x=10°}$$

Clave A

Resolución Nº 190



- Piden: x
- Se traza la bisectriz del $\sphericalangle ACE$, la cual corta a la prolongación de $\overline{AS}$ en P.
- En la parte sombreada:

$$m\sphericalangle SPC=x$$

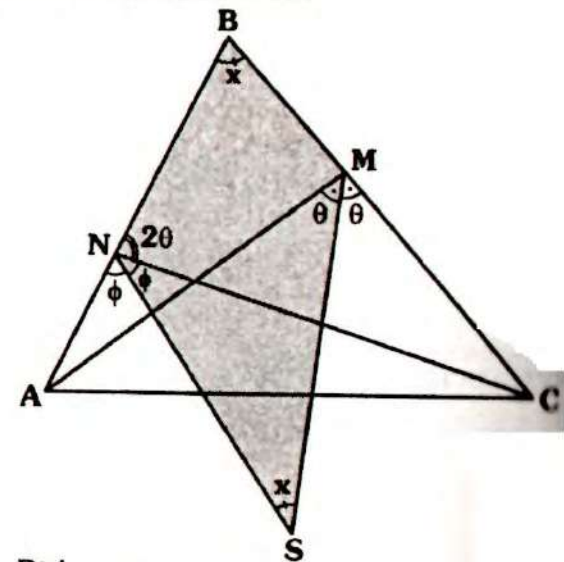
- En ΔABC, por ángulo entre bisectrices (*teorema* 26)

$$x=90°-\frac{70°}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=55°}$$

Clave D

Resolución Nº 191



- Piden: x
- Dato: $m\sphericalangle BNC=m\sphericalangle AMC$
- $m\sphericalangle BNC+m\sphericalangle CNA=180°$

$$\Rightarrow 2\theta+2\phi=180°\Rightarrow \theta+\phi=90°$$

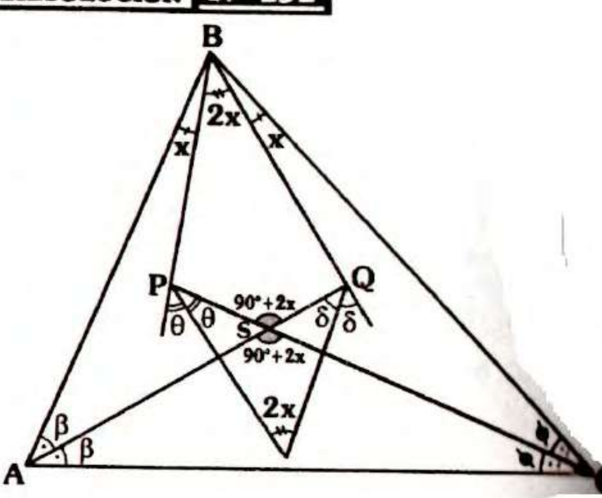
- En la región sombreada:

$$x+x=\underbrace{\theta+\phi}_{90°}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=45°}$$

Clave

Resolución Nº 192



- Piden: x

- En ΔABC, por teorema 25:

$$m\measuredangle ASC = 90° + \frac{(m\measuredangle ABC)}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle ASC = 90° + 2x$$

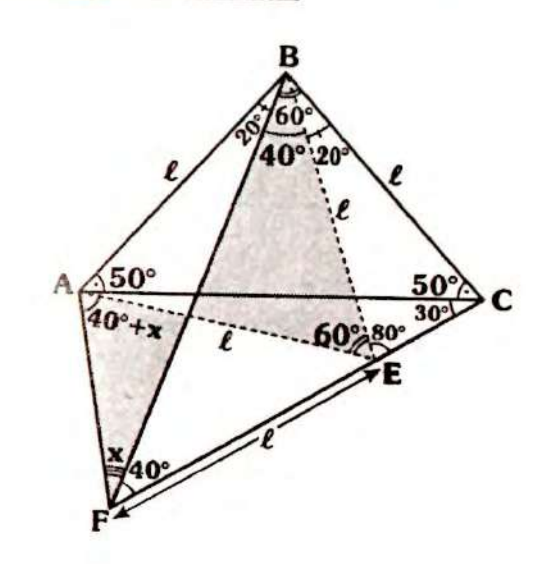
- En $\triangle PBSQ$, por teorema 31:

$$2x = \frac{(90° + 2x) - 2x}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{45°}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 193



- Nos piden: x
- Al completar "ángulos" nos damos cuenta:

$$m\measuredangle ACB = 2(m\measuredangle BAC)$$

- Se traza $\overline{BE}$, tal que $m\measuredangle CBE = 20°$

$\Rightarrow \Delta EBC$ y $\Rightarrow \Delta FEB$: isósceles

$\Rightarrow AE = EB = BC = \ell$

- Como $AB = BE$ y $m\measuredangle ABE = 60°$

$\Rightarrow \Delta BEA$ equilátero $\Rightarrow AE = \ell$

- ΔAEF: isósceles $\Rightarrow m\measuredangle EAF = 40° + x$

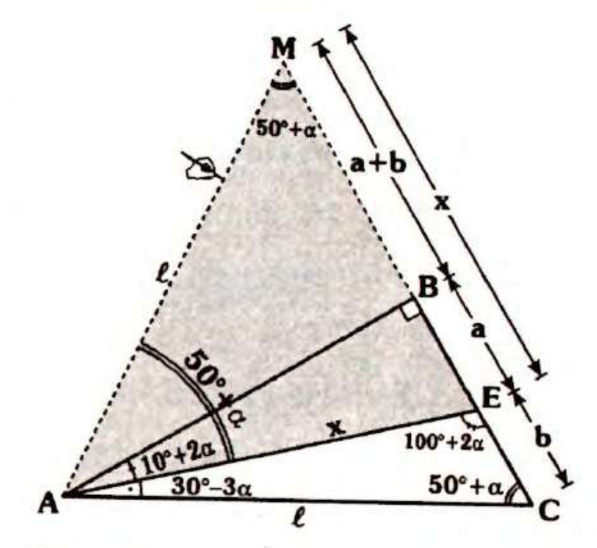
- En la parte sombreada:

$$x + 40° + x = 60° + 40°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 194



- Nos piden: x
- Completando ángulos, se tendrá:

$$m\measuredangle AEC = 2(m\measuredangle ACE)$$

- Se prolonga $\overline{CB}$ y se traza $\overline{AM}$ tal que:

$$m\measuredangle AME = 50° + \alpha$$

$$\Rightarrow m\measuredangle EAM = 50° + \alpha$$

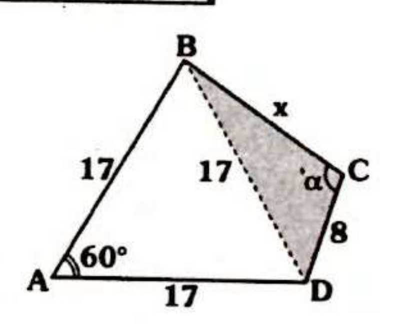
$\Rightarrow \Delta AMC$ y ΔAEM isósceles

$\Rightarrow MB = BC = a + b$ y $AE = EM$

$$\therefore \mathbf{x = 2a + b}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 195



- Piden la cantidad de valores enteros de x.
- Dato: $\alpha > 90^\circ$
- Como AB=AD y $m\sphericalangle BAD = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta BDA$ es equilátero $\Rightarrow BD = 17$

- En ΔBCD por existencia:

$$17 - 8 < x < 17 + 8$$

$$9 < x < 25 \qquad \ldots (I)$$

- Por teorema 21, como $\alpha > 90^\circ$

$$17^2 > x^2 + 8^2$$

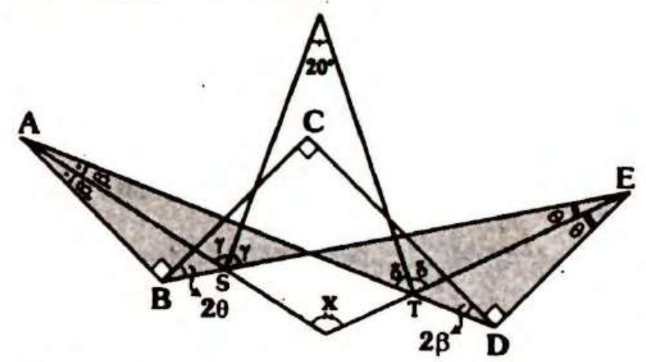
$$\Rightarrow 15 > x \qquad \ldots (II)$$

- De (I) y (II): $9 < x < 15$
- Los valores enteros de x, son:

$$\{10;11;12;13;14\}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 196



- Nos piden: x
- Del gráfico: $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{BC} // \overline{DE}$

$\Rightarrow m\sphericalangle CDA = 2\beta$ y $m\sphericalangle CBE = 2\theta$

- Por teorema 28:
  - En la parte sombreada:

$$x = \frac{(90^\circ + 2\theta) + (90^\circ + 2\beta)}{2}$$

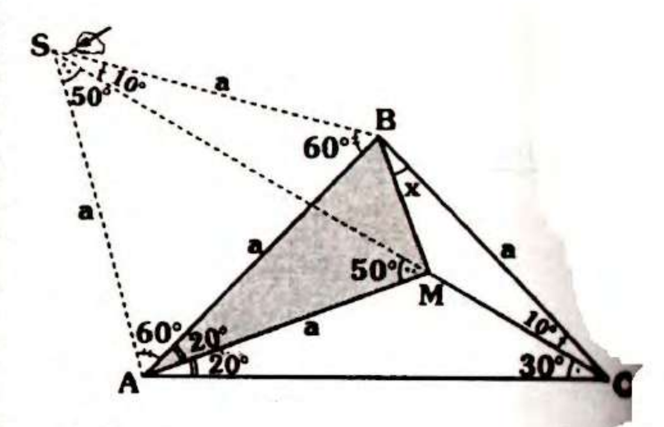
$$\Rightarrow x = 90^\circ + \theta + \beta \qquad \ldots (I)$$

- En ASET: $20^\circ = \frac{\theta + \beta}{2} \Rightarrow \theta + \beta = 40^\circ$
- En (I): $x = 90^\circ + 40^\circ$

$$\therefore \mathbf{x = 130^\circ}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 197



- Piden: x
- Se prolonga $\overline{CM}$ y se traza $\overline{BS}$ tal que $m\sphericalangle BSC = 10^\circ \Rightarrow BS = a$
- Como SB = BA y $m\sphericalangle SBA = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta BSA$ es equilátero $\Rightarrow AS = a$ y $m\sphericalangle ASM = 50^\circ$

ΔSAM : isósceles $\Rightarrow AM = a$

- Como $AB = AM \Rightarrow \Delta ABM$ es isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle AMB = m\sphericalangle ABM = 80^\circ$

$\Rightarrow m\sphericalangle BMS = 30^\circ$

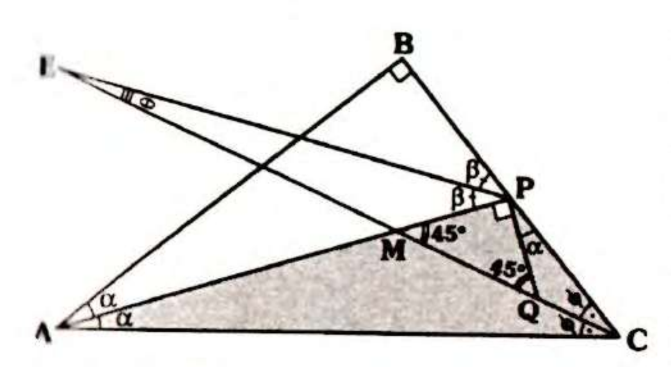
- En ΔBCM :

$$x + 10^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore \mathbf{x = 20^\circ}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 198



- Piden: $\dfrac{\alpha}{\theta}$
- Dato: $MP = PQ$
- En ◺ABP, por ángulo exterior:

$$m\measuredangle APQ + \alpha = 90° + \alpha$$

$$\Rightarrow m\measuredangle APQ = 90°$$

◺MPQ: isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle PMQ = m\measuredangle MQP = 45°$$

- Sea $m\measuredangle ACM = \phi \Rightarrow \alpha + \phi = 45°$

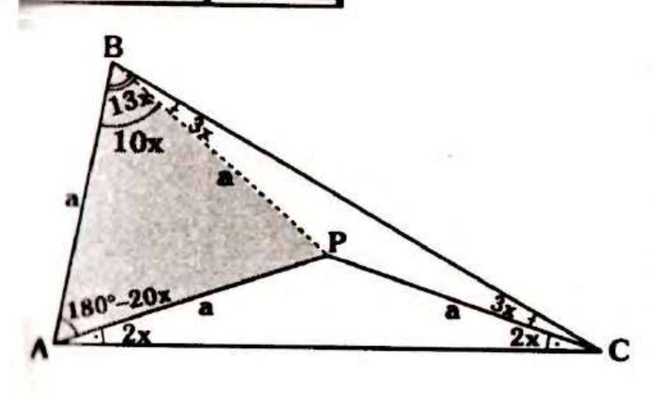
$$\Rightarrow m\measuredangle QCP = \phi$$

- En ΔAPC, por ángulo entre bisectrices (*teorema* 27):

$$\theta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{\theta} = 2$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 199



- Piden: $m\measuredangle PAC$
- Como $AB = AP$ y $m\measuredangle BAP = 180° - 20x$

$$\Rightarrow m\measuredangle ABP = m\measuredangle APB = 10x$$

$$\Rightarrow m\measuredangle PBC = 3x \Rightarrow \Delta PBC$$

es isósceles $\Rightarrow PB = PC = a$

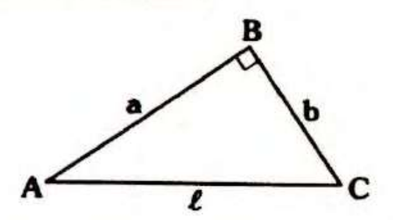
- ΔABP : equilátero $\Rightarrow 10x = 60°$

$$\Rightarrow x = 6°$$

$$\therefore \quad \mathbf{m\measuredangle PAC = 12°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 200



- Piden la cantidad de valores enteros de ℓ.
- Dato: $a + b + \ell = 30$
- En ◺ABC:

$$\ell > a$$

$$\ell > b$$

$$\Rightarrow 2\ell > a + b$$

$$\ell + 2\ell > \underbrace{a + b + \ell}_{30} \Rightarrow \ell > 10$$

- Por existencia:

$$\ell < a + b$$

$$\Rightarrow \ell + \ell < \underbrace{a + b + \ell}_{30} \Rightarrow \ell < 15$$

- Se tendrá entonces:

$$10 < \ell < 15 \qquad \text{... (I)}$$

- Aún no podemos indicar la cantidad de valores, falta la restricción para que sea triángulo rectángulo:

$$a^2 + b^2 = \ell^2$$

Considerando:

- Sean: $x, y \in \mathbb{R}^+$, se cumple:

$$M.C. \geq M.A.$$

- M.C.: media cuadrática
- M.A.: media aritmética

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$$

- Usando la observación para a y b:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{\ell^2}{2}} \geq \frac{(30-\ell)}{2}$$

- Resolviendo: $\ell \geq 30(\sqrt{2}-1)$

$$\ell \geq 12{,}426 \quad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

$$12{,}426 \leq \ell < 15$$

- Los valores entero de ℓ son: {13;14}

Clave A

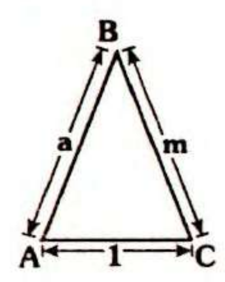


a *y* **b** *no son enteros necesariamente, la condición :* $a, b \in \mathbb{R}^+$.

❖❖❖❖❖



RESOLUCIÓN Nº 201



- Nos piden la medida del menor ángulo exterior.
- Dato: a , $m \in \mathbb{Z}^+$ y β es la medida del mayor ángulo exterior.
- Analicemos:

Por existencia $|a-m|<1<a+m$

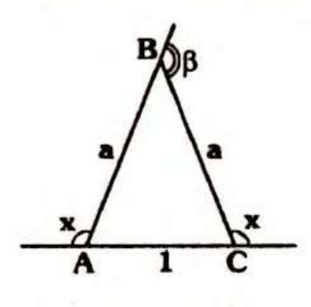
Como a y m son enteros $\Rightarrow a=m$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB$$

- Por dato existen medidas angulares mayor y menor $\Rightarrow a>1$

$$\Rightarrow m\measuredangle BCA > m\measuredangle ABC$$

$\Rightarrow$ El mayor ángulo exterior es en "B".

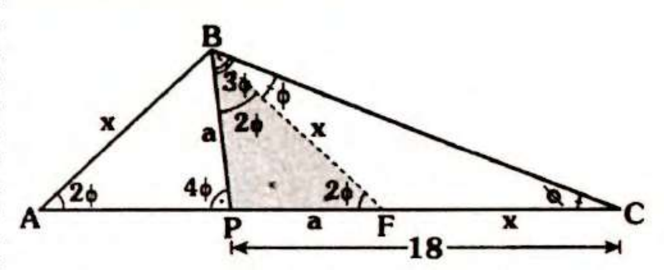


$$x+x+\beta=360°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=180° - \frac{\beta}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 202



- Nos piden la cantidad de valores enteros de x.
- Se traza $\overline{BF}$, tal que $m\measuredangle FBC = \phi$

$\Rightarrow \Delta FBC$, ΔPBF y ΔABF: isósceles

$\Rightarrow AB = BF = FC = x$ y $PB = PF = a$

- Del gráfico: $a+x=18$
- En ΔABP: como $m\measuredangle APB > m\measuredangle BAP$

$$\Rightarrow x>a$$

$$\Rightarrow\ 2x > \underbrace{x+a}_{18}$$

$$x>9 \qquad \dots (I)$$

- En ΔBFP, por existencia:

$$x<2a$$

$$\frac{x}{2}<a$$

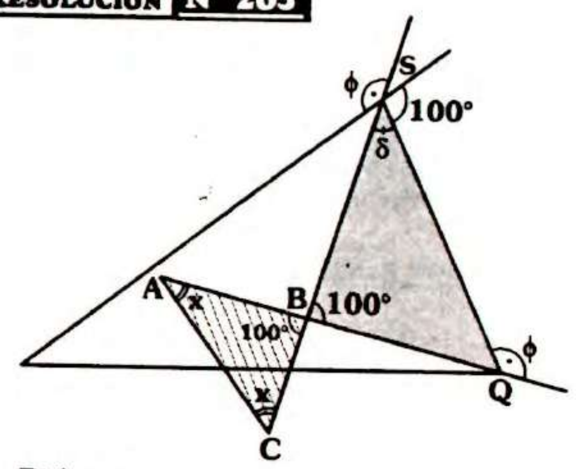
$$\Rightarrow x+\frac{x}{2} < \underbrace{a+x}_{18}$$

$$\Rightarrow x<12 \qquad \dots (II)$$

- De (I) y (II): $9<x<12$
- Los valores enteros de x, son: **{10;11}**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 203



- Piden: x
- Dato: ΔABC : isósceles
- Sea $m\measuredangle BSQ \Rightarrow m\measuredangle SBQ + \delta = \phi$

$$\Rightarrow m\measuredangle SBQ = 100°$$

- Como ΔABC es isósceles y $m\measuredangle ABC = 100°$

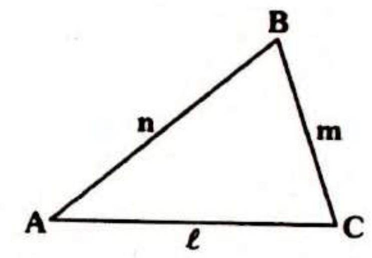
$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA = x$$

$$\Rightarrow x + x + 100° = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 40°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 204



- Nos piden la cantidad de triángulos de longitudes enteras y perímetro 40.

$$\Rightarrow m, n \text{ y } \ell \in \mathbb{Z}^+$$

- Sea p el semiperímetro de $\blacktriangle ABC \Rightarrow p = 20$, por teorema de existencia:

$$m < 20 \text{ ; } n < 20 \text{ y } \ell < 20$$

- Sin pérdida de generalidad, consideremos:

$$m \geq n \geq \ell \qquad \text{... (I)}$$

- Como m, n, ℓ son enteros, analicemos de la siguiente forma:

- Para $m = 19$: $\Rightarrow n + \ell = 21$

n	+	ℓ	= 21
↓		↓	
19		2	
18		3	
17		4	
16		5	
15		6	
14		7	
13		8	
12		9	
11		10	

Si consideramos $n = 10 \Rightarrow \ell = \mathbf{11}$, ya no cumpliría (I), además el Δ ya se habría contado, se trataría del Δ de lados {19;11;10}

$\Rightarrow$ Cuando $m = 19 \Rightarrow$ tenemos 9 triángulos.

- Para $m = 18 \Rightarrow n + \ell = 22$

n	+	ℓ	= 22
↓		↓	
18		4	
17		5	
16		6	
15		7	
14		8	
13		9	
12		10	
11		11	

$\Rightarrow$ se tienen 8 triángulos

- Para $m = 17 \Rightarrow n + \ell = 23$

$$\begin{array}{ccc} n & + & \ell & = 23 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 17 & & 6 \\ 16 & & 7 \\ 15 & & 8 \\ 14 & & 9 \\ 13 & & 10 \\ 12 & & 11 \end{array}$$

$\Rightarrow$ se tienen 6 triángulos

- Para $m = 16 \Rightarrow n + \ell = 24$

$$\begin{array}{ccc} n & + & \ell & = 24 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 16 & & 8 \\ 15 & & 9 \\ 14 & & 10 \\ 13 & & 11 \\ 12 & & 12 \end{array}$$

$\Rightarrow$ se tienen 5 triángulos

- Para $m = 15 \Rightarrow n + \ell = 25$

$$\begin{array}{ccc} n & + & \ell & = 25 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 15 & & 10 \\ 14 & & 11 \\ 13 & & 12 \end{array}$$

$\Rightarrow$ se tienen 3 triángulos

- Para $m = 14 \Rightarrow n + \ell = 26$

$$\begin{array}{ccc} n & + & \ell & = 26 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 14 & & 12 \\ 13 & & 13 \end{array}$$

$\Rightarrow$ se tienen 2 triángulos

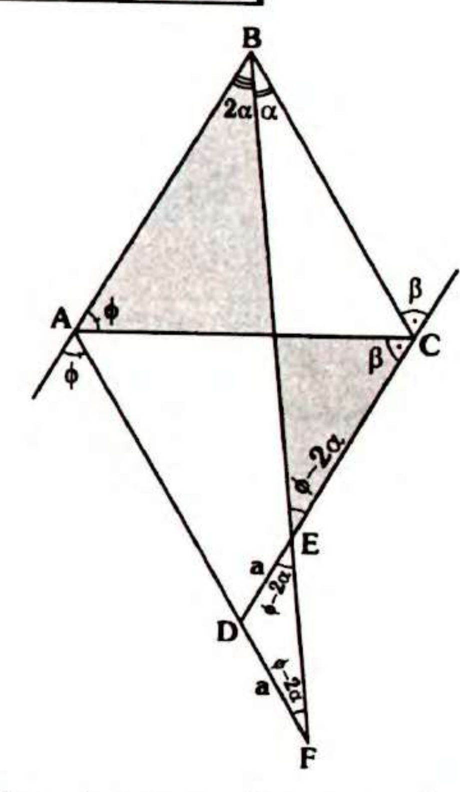
- Luego:

El total de triángulos es: 9+8+6+5+3+2

Por lo tanto, el total de triángulos es 33

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 205



- Piden el mayor valor entero de α
- Analicemos las restricciones para α
- En $\Delta ABC: 3\alpha < 180° \Rightarrow \alpha < 60°$ .... (I)
- En $\Delta EBC: \beta = \phi - \alpha$
- En la parte sombreada:

$$\phi + 2\alpha = \phi - 2\alpha + \underbrace{\beta}_{\phi-\alpha}$$

$$\Rightarrow \phi = 5\alpha$$

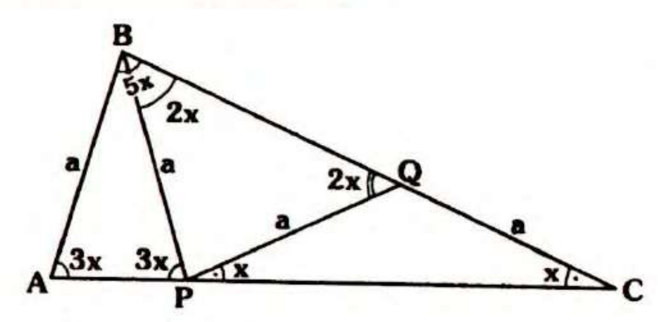
- En (A): $2\phi < 180°$

$$\Rightarrow 2(5\alpha) < 180° \Rightarrow \alpha < 18° \quad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II): nos quedamos con la última rectricción, por lo tanto el mayor valor de α es **17°**.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 206

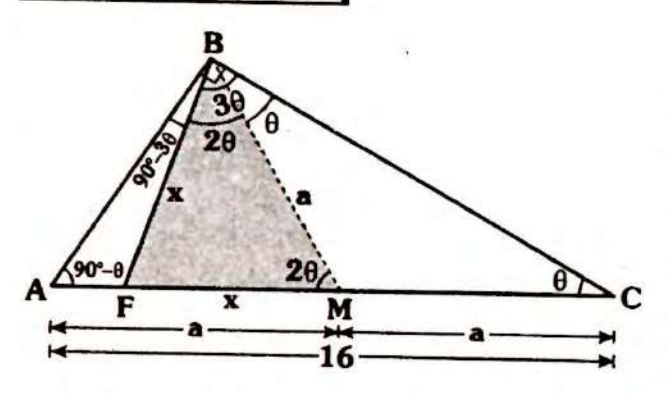


- Nos piden x
- De los datos ΔABP, ΔBQP y ΔPQC son triángulos isósceles.
- En ΔABC: $5x + 3x + x = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 207



- Piden el menor valor entero de x.
- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\measuredangle CBM = \theta$

$\Rightarrow \Delta BCM$ y ΔABM: isósceles

$\Rightarrow BM = MC = AM = a$

$2a = 16 \Rightarrow a = 8$

ΔFBM : isósceles $\Rightarrow FB = FM = x$

Por existencia: $a < x + x$

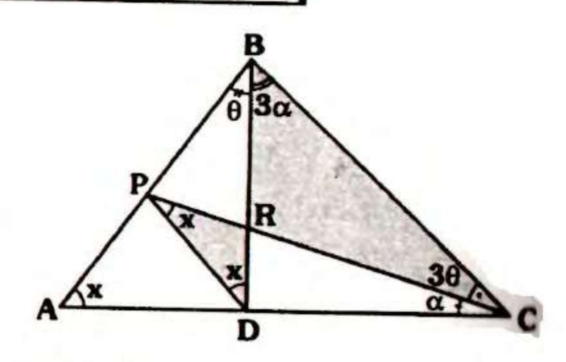
$\Rightarrow 8 < 2x$

$\Rightarrow 4 < x$

- Por lo tanto el menor valor entero de x es: **5**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 208



- Nos piden: x
- En ΔABC: $x + 4(\alpha + \theta) = 180°$
- En la parte sombreada:

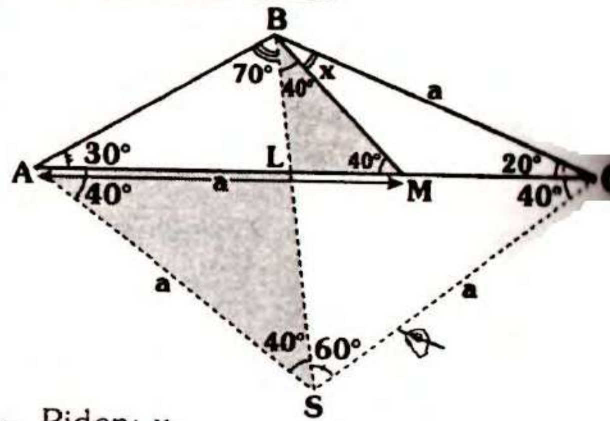
$$x + x = 3(\alpha + \theta) \Rightarrow \frac{2}{3}x = \alpha + \theta$$

- En (I): $x + 4\left(\frac{2}{3}x\right) = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{540°}{11}}$$

Clave

RESOLUCIÓN Nº 209



- Piden: x
- Se traza $\overline{CS}$ tal que $m\measuredangle ACS = 40°$
  $CS = a \Rightarrow \Delta BCS$ es equilátero
- Como $SC = SB$ y $m\measuredangle BSC = 2(m\measuredangle BAC)$, de la observación indicada en el estudio del triángulo isósceles $\Rightarrow SA = a$
- Luego el ΔASB es isósceles $\Rightarrow SB = a$
- Como $AM = SB$ y ΔALS es isósceles

(AL LS)

⇒ LM = LB ⇒ ΔLBM es isósceles

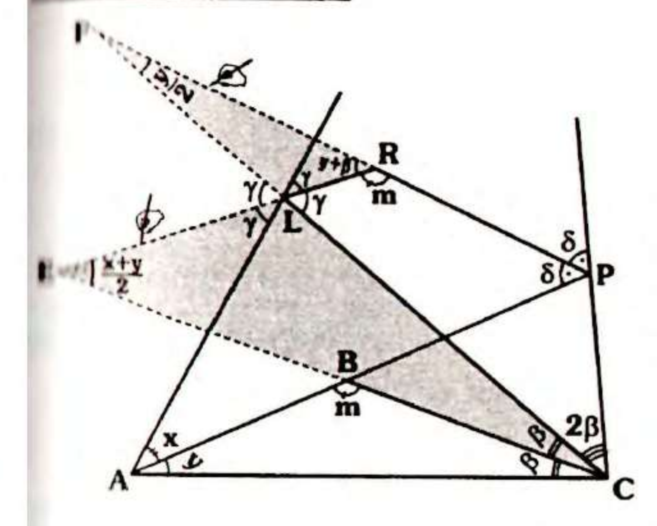
⇒ m∢LBM = m∢BML = 40°

• En ΔBMC : $x + 20° = 40°$

$\therefore \mathbf{x = 20°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 210



• Piden: $\dfrac{x}{y}$

• En ΔAPC y ΔALC, por ángulo entre bisectrices (teorema 27):

$$m∢LEC = \frac{m∢LAC}{2} \Rightarrow m∢LEC = \frac{x+y}{2}$$

$$m∢PFC = \frac{m∢PAC}{2} \Rightarrow m∢PFC = \frac{y}{2}$$

• En ΔABC : $m + y + \beta = 180°$

$\Rightarrow m∢ERF = y + \beta$

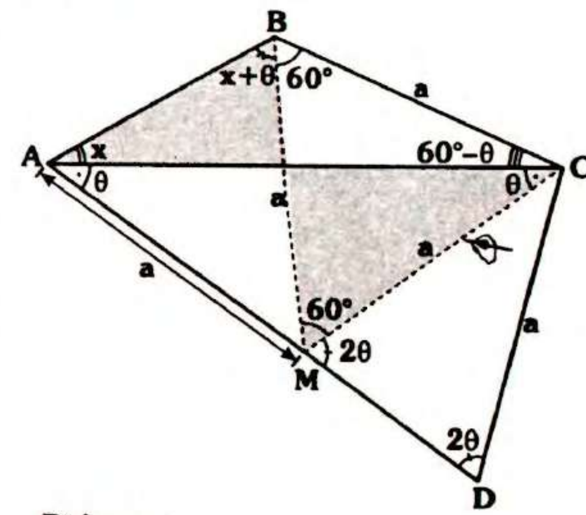
• En la parte sombreada (⧖):

$$\frac{x+y}{2} + \beta = \frac{y}{2} + y + \beta$$

$$\Rightarrow \mathbf{\frac{x}{y} = 2}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 211



• Piden: x

• Se traza $\overline{CM}$ tal que m∢ACM = θ ⇒ ΔACM y ΔMCD es isósceles.

• Como m∢ACM = 60° y BC = CM ⇒ ΔBMC es equilátero

⇒ MA = MB ⇒ m∢ABM = x + θ

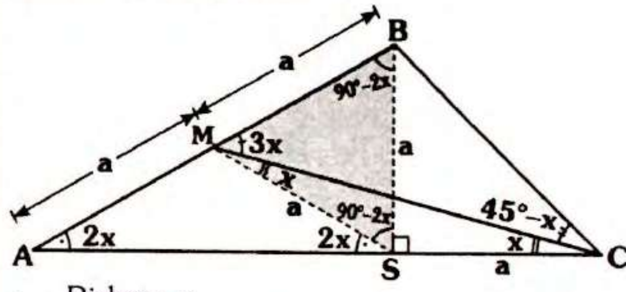
• En la parte sombreada (⋈):

$$x + x + \theta = 60° + \theta$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 212



• Piden: x

• Se traza $\overline{MS}$ tal que m∢CMS = x

⇒ ΔAMB y ΔSMC :

isósceles ⇒ MS = SC = a

- Como MB=MS y $m\measuredangle SMB = 4x$

$$m\measuredangle MSB = m\measuredangle MBS = 90° - 2x$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BSC = 90° \Rightarrow \triangle BSC:$$

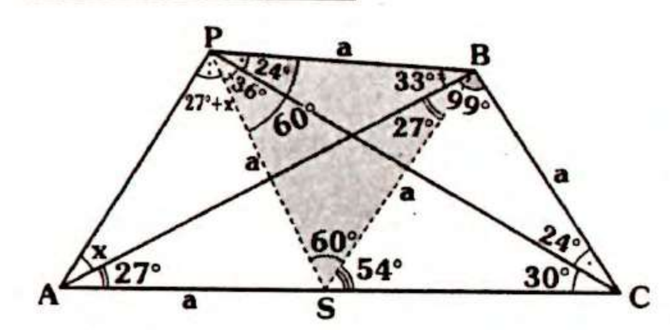
$$\text{isósceles} \Rightarrow SC = BS = a$$

$$\Rightarrow \Delta MBS: \text{equilátero} \Rightarrow 4x = 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 15°}$$

Clave C

Resolución Nº 213



- Piden: $m\measuredangle APC$
- Al completar ángulos, verificamos:

$$m\measuredangle BCA = 2(m\measuredangle BAC)$$

- Luego se traza $\overline{BS}$ tal que:

$$m\measuredangle ABS = 27°$$

$$\Rightarrow \Delta ABS \text{ y } \Rightarrow \Delta SBC \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow AS = SB = BC = a$$

- También ΔPSB: equilátero

$$\Rightarrow AS = SP \Rightarrow m\measuredangle APS = 27° + x$$

- En ΔAPS, por ángulo exterior:

$$2x + 54° = 60° + 54°$$

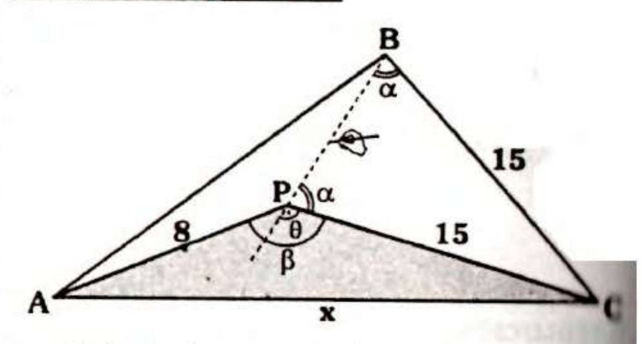
$$\Rightarrow x = 30°$$

- Como nos piden $m\measuredangle APC: 27° + 30° + 36°$

$$\therefore \mathbf{m\measuredangle APC = 93°}$$

Clave A

Resolución Nº 214



- Piden el menor valor entero de x.
- En ΔAPC, por existencia:

$$7 < x < 23 \quad \text{(I)}$$

- También ΔBPC: isósceles

$$\Rightarrow \alpha < 90° \Rightarrow \theta > 90°$$

- Como $\beta > \theta \Rightarrow \beta > 90° \Rightarrow \Delta APC$ es obtuso, por teorema 21:

$$x^2 > 8^2 + 15^2$$

$$\Rightarrow x > 17 \quad \text{... (II)}$$

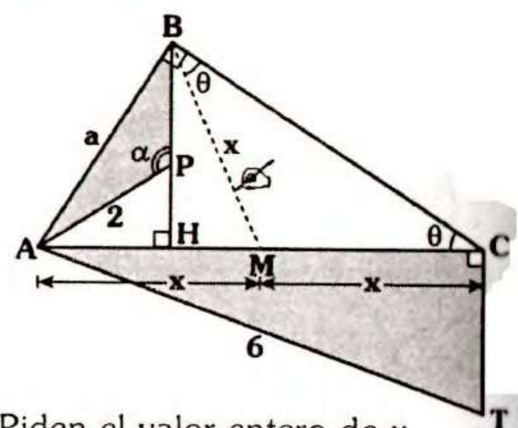
- De (I) y (II):

$$17 < x < 23$$

- Por lo tanto el menor valor entero de x es 18.

Clave C

Resolución Nº 215



- Piden el valor entero de x.

- Si trazamos $\overline{BM}$ tal que $m\measuredangle CBM = \beta$, se verifica:

$$AM = MC = MB$$

- En $\triangle ABP$: $\alpha > 90° \Rightarrow a > 2$ ... (I)
- En ΔABM: $a < 2x$ ... (II)
- De (I) y (II): $2x > a > 2$

$$\Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1 \quad \text{... (III)}$$

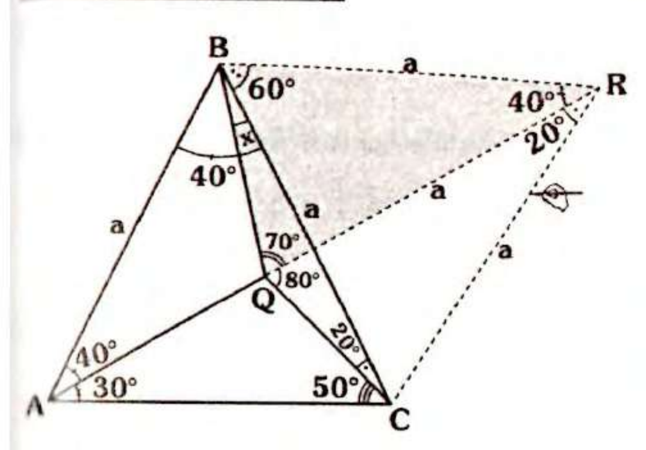
- En ACT: $2x < 6 \Rightarrow x < 3$ ... (IV)
- De (III) y (IV):

$$1 < x < 3$$

- Por lo tanto el valor entero de x es: **2**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 216



- Piden: x
- Como $m\measuredangle BAQ = 40°$ y $m\measuredangle BQR = 70°$, de acuerdo a los criterios de trazos auxiliares, se prolonga $\overline{AQ}$ y se traza $\overline{BR}$ tal que $m\measuredangle BRA = 40° \Rightarrow BR = a$
- Como: $CB = BR = a$ y

$$m\measuredangle CBR = 60° \Rightarrow \Delta CBR$$

es equilátero $\Rightarrow$ $CR = a$
- Luego:

ΔQRC : isósceles $\Rightarrow QR = RC = a$
- Como

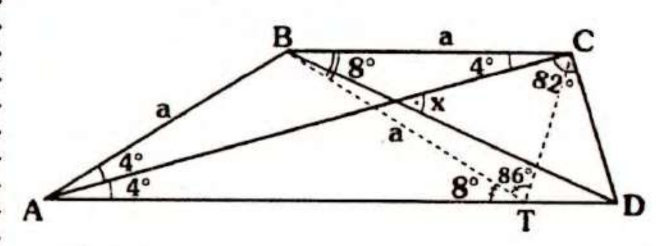
$QR = RB \Rightarrow m\measuredangle BQR = m\measuredangle QBR = 70°$

$$\Rightarrow 60° + x = 70°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 10°}$$

Clave A

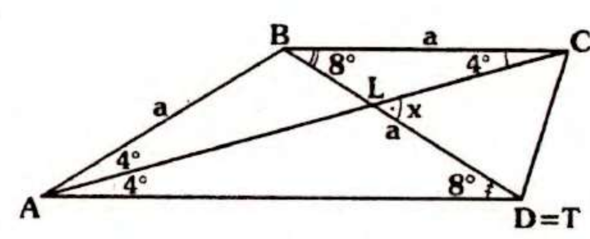
RESOLUCIÓN Nº 217



- Piden: x
- Del gráfico AB=BC y $\overline{AD} // \overline{BC}$ desde B se va a trazar el segmento $\overline{BT}$, tal que BT=a y $T \in \overleftrightarrow{AD}$.
- Para "T" se tiene las siguientes posibilidades:
  - "T" esté a la izquierda de D (como en el gráfico).
  - "T" esté a la derecha de D.
  - "T" coincida con D.
- Tomando el primer caso, se tendrá: ΔBTC isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle BCT = m\measuredangle BTC = 86°$$

con ello se deduce $m\measuredangle ACT = 82°$, lo cual no puede ser, pues $m\measuredangle ACD = 82°$.
- En forma análoga se descarta la segunda posibilidad con ello se deduce: T=D, el gráfico quedaría asi:

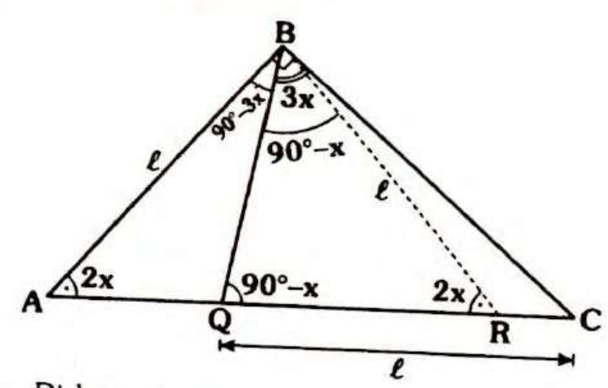


- En ΔALD: $x = 4° + 8°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 12°}$$

Clave C

Resolución Nº 218



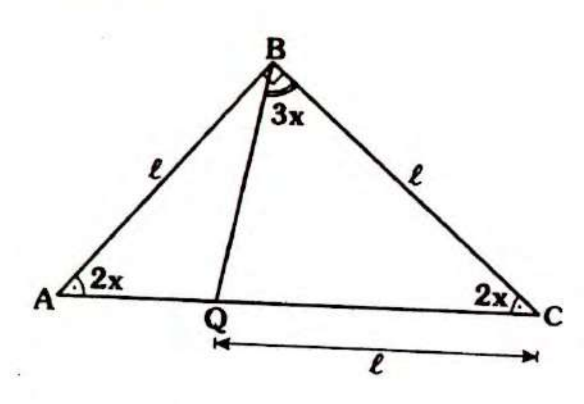
- Piden: x
- Completando ángulos se tiene :

  m∢BAC = 2x y m∢BQC = 90° − x

- Se traza $\overline{BR}$ tal que m∢BRA = 2x , pero para el punto R, así como el problema anterior hay tres posibilidades.
- Como ΔABR y ΔQRB :

  isósceles ⇒ AB = BR = QR = ℓ

  pero QC = ℓ , es decir: QR = QC , de donde se deduce R=C, el gráfico quedaría, asi:

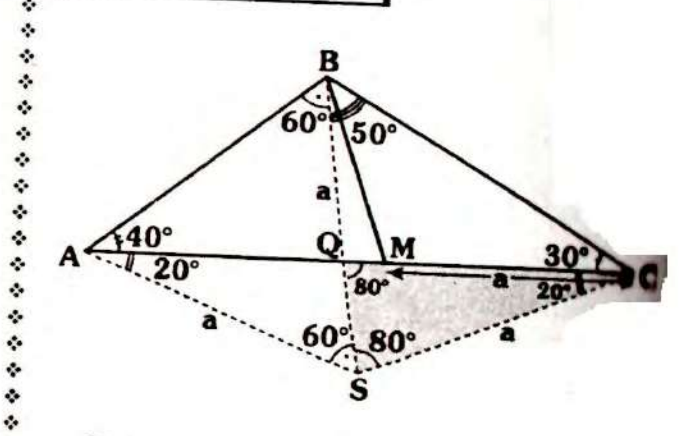


- Como AB = BC ⇒ 2x + 2x = 90°

$$\therefore\ \mathbf{x = 22°30'}$$

Clave D

Resolución Nº 219



- Piden: x
- Se traza $\overline{AS}$ y tal que: ΔABS equilátero, con ello tendremos:

  AS = SB = a y m∢ASB = 2(m∢ACB)

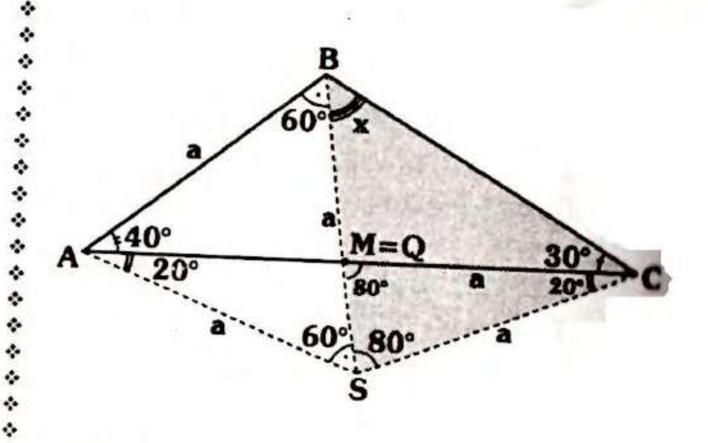
⇒ SC = a (*De la observación indicada en el estudio del triángulo isósceles, ver pág. 22*).

ΔBSC : isósceles ⇒ m∢SBC = m∢SCB = 90°

⇒ m∢SCM = 20° ⇒ ΔSQC : isósceles

⇒ QC = CS = a , pero por dato: CM = a

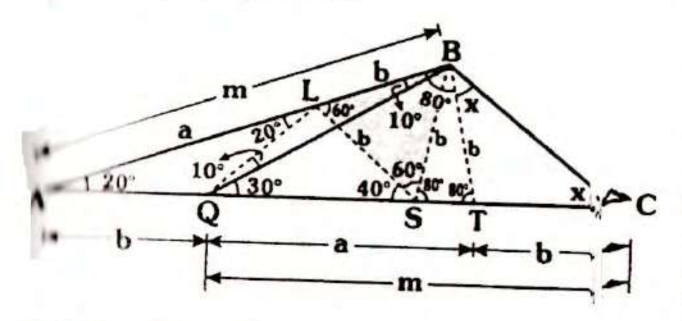
- Es decir: CM = CQ = a ⇒ M = Q , el gráfico quedaría, así:



- De donde: **x = 50°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 220



- Nos piden: x
- En ΔAQB se tiene:

$$m\sphericalangle BAQ = 2(m\sphericalangle ABL)$$

Se traza $\overline{QL}$ tal que:

$$m\sphericalangle BQL = 10° \Rightarrow AQ = QL = LB = a$$

- Se traza luego $\overline{BT}$ tal que:

$$m\sphericalangle ATB = 80°$$

ΔABT : isósceles $\Rightarrow AB = AT = m$,

como $m = a + b$

- Del dato: $QC = m \Rightarrow TC = b$
- Se traza $\overline{LS}$ tal que:

$$m\sphericalangle ASL = 40° \Rightarrow LS = b$$

- Se tendrá luego:

$$SL = LB \text{ y } m\sphericalangle SLB = 60°$$

$\Rightarrow \Delta BLS$ equilátero $\Rightarrow SB = b$ y

$$m\sphericalangle BST = 80°$$

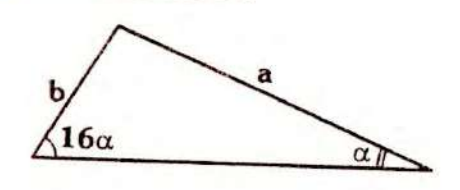
- Luego ΔSBT : isósceles $\Rightarrow TB = b$
- Finalmente, el ΔTCB es isósceles

$$\Rightarrow x + x = 80°$$

$$\therefore \mathbf{x = 40°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 221

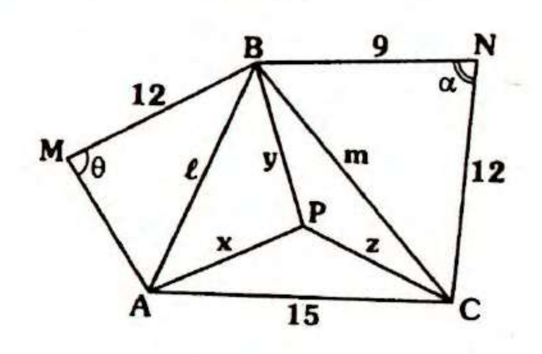


- Nos piden la relación entre a y b.
- Es una aplicación directa del teorema 56, para $n = 16$:

$$\mathbf{b < a < 16b}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 222



- Piden el mayor valor entero de:

$$x + y + z$$

- Dato: - "ℓ" es menor entero
  - "m" es mayor entero
  - $\alpha < 90°$ y $\theta > 90°$
- En ΔBNC, como $\alpha < 90°$

$$\Rightarrow m^2 < 12^2 + 5^2 \Rightarrow m < 13$$

- Como "m" es mayor entero $\Rightarrow m = 12$
- En ΔAMB, como $\theta > 90°$, se puede asegurar: $\ell > 12$

como ℓ es menor entero $\Rightarrow \ell = 13$

- En ΔABC:

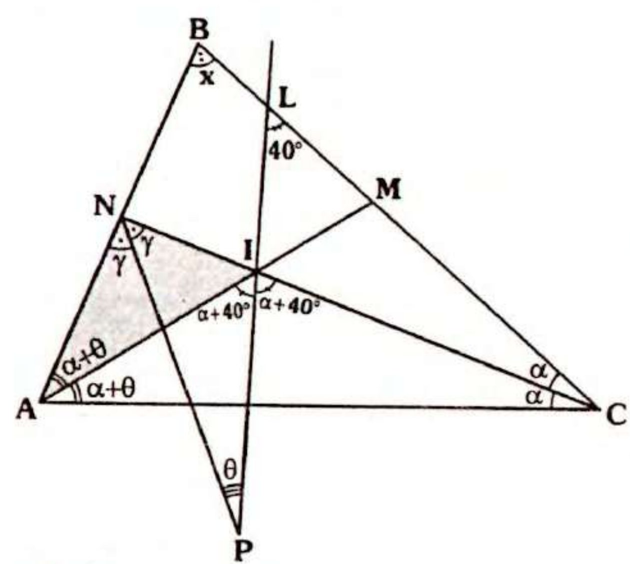
$$\frac{\ell + m + 15}{2} < x + y + z < \overbrace{13 + 15}^{\text{dos mayores}}$$

$$\Rightarrow 20 < x + y + z < 28$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de $x + y + z$, es **27**.

Clave D

RESOLUCIÓN N° 223



- Piden: x
- En ΔIAN , por ángulo entre bisectrices (*teorema* 27):

$$m\sphericalangle NPI = \frac{m\sphericalangle IAN}{2} \Rightarrow \theta = \alpha$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle IAC = 2\alpha$$

- En ΔAIC :

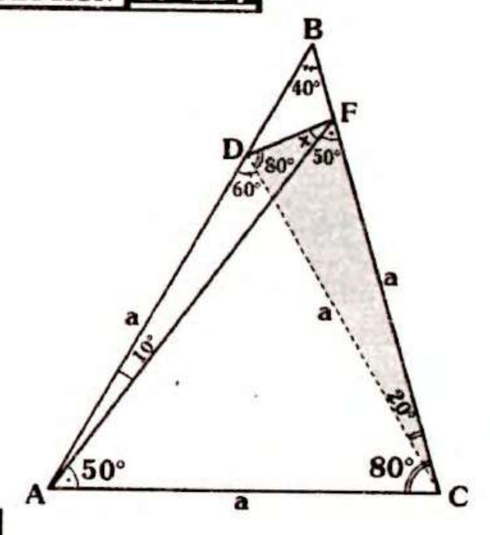
$$2\alpha + 2\alpha + 80° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 20°$$

- En $\Delta ABC : x + 40° + 80° = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN N° 224



- Piden: x
- Como $AD = AC$ y $m\sphericalangle DAC = 60°$
  $\Rightarrow \Delta ACD$ es equilátero $\Rightarrow CD = a$ y
  $m\sphericalangle ACD = 60°$

ΔACF : isósceles

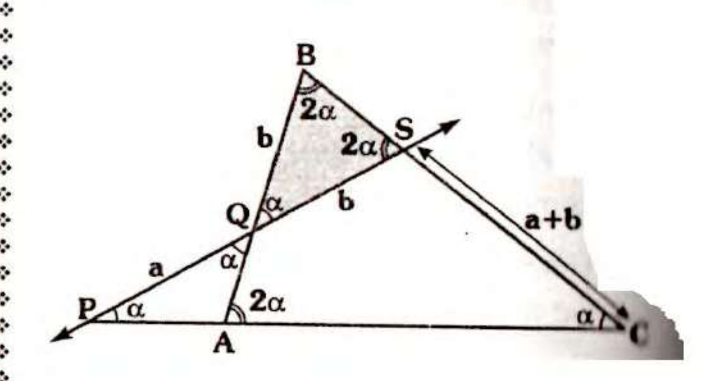
$$\Rightarrow m\sphericalangle DFC = m\sphericalangle FDC = 80°$$

$$\Rightarrow x + 50° = 80°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN N° 225



- Piden: α
- Dato: $SC - PQ = QB$

$$\Rightarrow SC = PQ + QB$$

- ΔPSC : isósceles

$$\Rightarrow PS = SC = a + b$$

$$\Rightarrow QB = QS = b$$

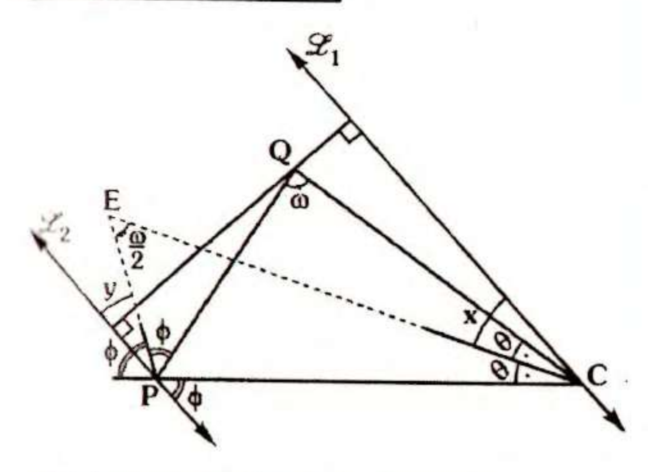
- ΔQBS : isósceles

$$\Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$$

$$\therefore \mathbf{\alpha = 36°}$$

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN Nº 226



- Piden ω en función de x e y
- En $\triangle PQC$ por ángulo entre bisectrices (teorema 27):

$$m\measuredangle PEC = \frac{\omega}{2}$$

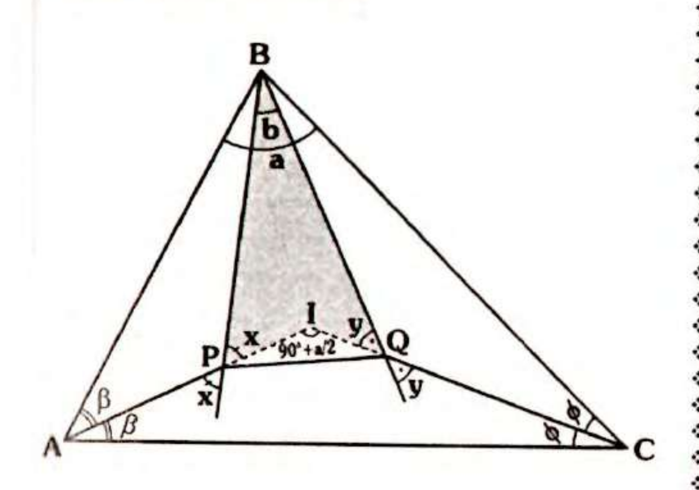
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, por teorema:

$$\frac{\omega}{2} = x + y$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\omega = 2(x+y)}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 227



- Piden: x
- Dato: $a - 2b = 20°$
- Por ángulo entre bisectrices:

$$m\measuredangle AIC = 90° + \frac{a}{2}$$

- En la región sombreada ($\triangle$):

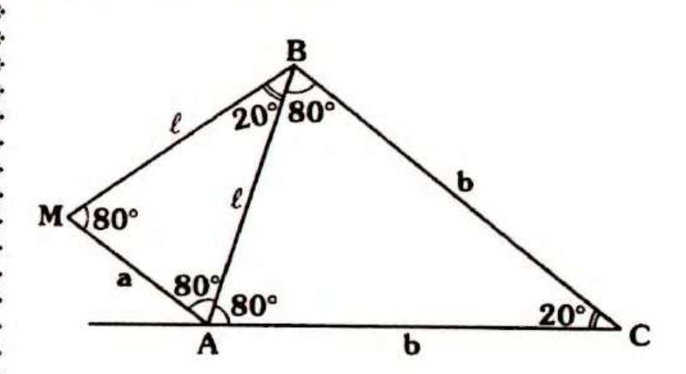
$$x + y + b = 90° + \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow x + y = 90° + \left(\frac{a - 2b}{2}\right)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x + y = 100°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 228



- Nos piden la relación entre b y a.
- En $\triangle ABC$ y $\triangle MBA$ por teorema 51:

$$2 < \frac{b}{\ell} < 3 \qquad \ldots \text{(I)}$$

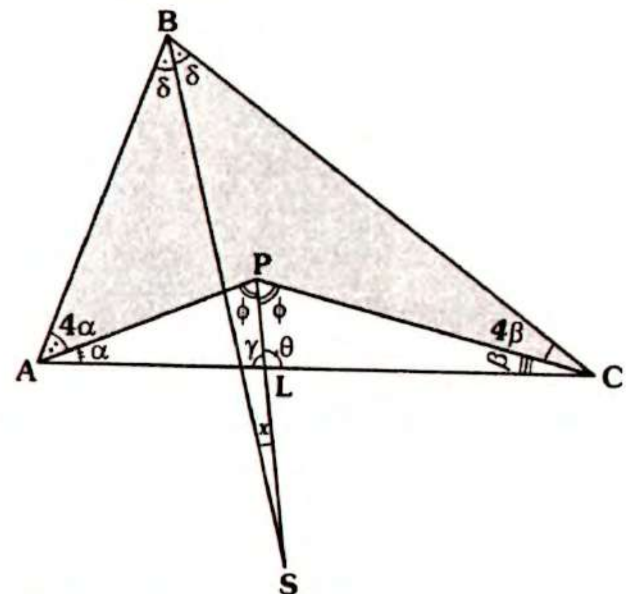
$$2 < \frac{\ell}{a} < 3 \qquad \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II):

$$\boldsymbol{4 < \frac{b}{a} < 9}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 229



- Piden: x
- Dato: $\theta - \gamma = 20°$
- En la parte sombreada, por teorema 30:

$$x = \frac{4\alpha - 4\beta}{2} \Rightarrow x = 2(\alpha - \beta)$$

- Del gráfico: $\theta = \alpha + \phi$

$$\gamma = \beta + \phi$$

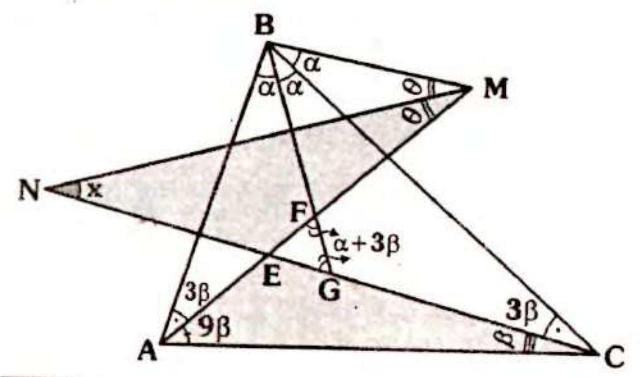
$$\Rightarrow \theta - \gamma = \alpha - \beta$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = 20°$$

$$\therefore \mathbf{x = 40°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 230



- Piden: x en función de β.

ΔEFG : isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle EGF = m\measuredangle FFG = \alpha + 3\beta$

$\Rightarrow m\measuredangle BAF = 3\beta$

- Como

$m\measuredangle CAM = 3m\measuredangle MAB \Rightarrow m\measuredangle CAM = 9\beta$

- En ΔABC :

$2\alpha + 16\beta = 180° \Rightarrow \alpha + 8\beta = 90°$ ... (I)

- En la parte sombreada ($\measuredangle$NMAC)

$x + \theta = 10\beta$ ... (II)

- En $\measuredangle$NCBM:

$x + 3\beta = \alpha + \theta$ ... (III)

- Sumando (II) y (III):

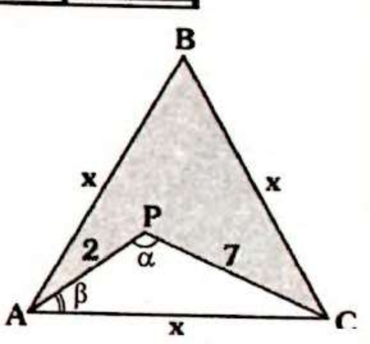
$$2x = 7\beta + \alpha$$

$$\Rightarrow 2x = \underbrace{8\beta + \alpha}_{90°} - \beta$$

$$\therefore \mathbf{x = 45° - \frac{\beta}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 231



- Piden la razón entre los valores máximo y mínimo entero del perímetro
- Analicemos las restricciones para x.
- En ΔAPC : por existencia

$5 < x < 9$ ... (I)

- En la parte sombreada:

$$x + x > 2 + 7 \Rightarrow x > 4,5 \quad \dots (II)$$

- Como $\alpha > 60°$ y $\beta < 60° \Rightarrow \alpha > \beta$
- En ΔAPC: $x > 7 \quad \dots (III)$
- De (I), (II) y (III): $7 < x < 9$
- Multiplicando 3:

$$21 < \underbrace{3x} < 27$$

$$21 < \text{Perím}_{\blacktriangle ABC} < 27$$

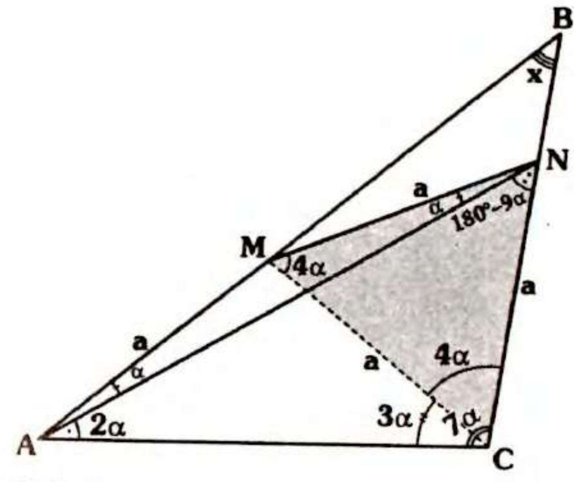
$$\Rightarrow \text{Perím}_{\blacktriangle ABC(\text{máximo entero})} = 26$$

$$\text{Perím}_{\blacktriangle ABC(\text{mínimo entero})} = 22$$

- Por lo tanto la razón entre ellos es: $\mathbf{\dfrac{13}{11}}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 232



- Piden: x

En ΔABC: $x + 10\alpha = 180° \quad \dots (I)$

En ΔANC: $m\sphericalangle CNA = 180° - 9\alpha$

$$\Rightarrow m\sphericalangle MNC = 180° - 8\alpha$$

- Como

$MN = NC \Rightarrow m\sphericalangle NMC = m\sphericalangle MCN = 4\alpha$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ACM = 3\alpha \Rightarrow AM = MC = a$$

$$\Rightarrow \Delta MNC : \text{equilátero}$$

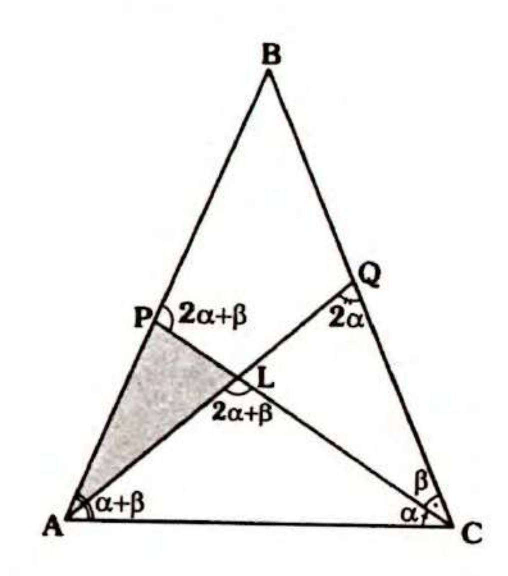
$$4\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 15°$$

- En (I): $x + 10(15°) = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 233



- Nos piden la relación entre AL y AP.
- Sea $m\sphericalangle PCB = \beta$
- Como :

$AB = BC \Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB = \alpha + \beta$

- En ΔAPC, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle BPC = 2\alpha + \beta$$

- En ΔLQC:

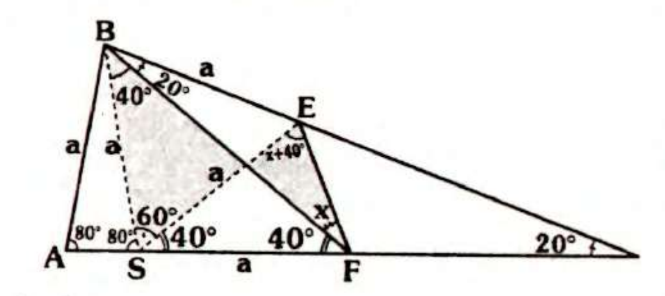
$$m\sphericalangle ALC = 2\alpha + \beta$$

- Como el ΔALP tiene dos ángulos exteriores de igual medidas $\Rightarrow$ es isósceles

$$\therefore \mathbf{AL = AP}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 234



- Piden: x
- En ΔABF $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BFA)$
- Se traza $\overline{BS}$ tal que $m\sphericalangle FBS = 40°$

$\Rightarrow AB = BS = SF = a$

- Como:

$BE = BS$ y $m\sphericalangle SBE = 60° \Rightarrow \Delta EBS$ es equilátero $\Rightarrow SE = a$

- ΔSEF es isósceles

$\Rightarrow \ m\sphericalangle SFE = m\sphericalangle SEF = 40° + x$

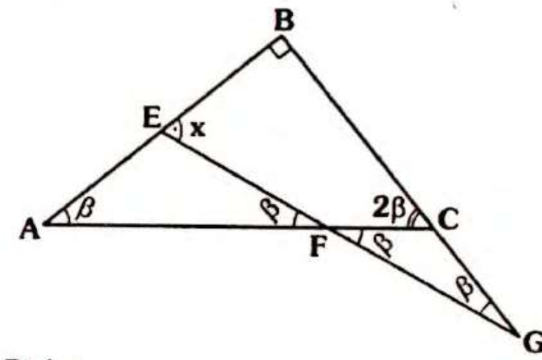
- En la parte sombreada:

$$x + x + 40° = 40° + 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 235



- Piden: x
- Dato: ΔAEF y ΔFCB : isósceles
- Como $m\sphericalangle AEF > 90°$ y $m\sphericalangle FCG > 90°$

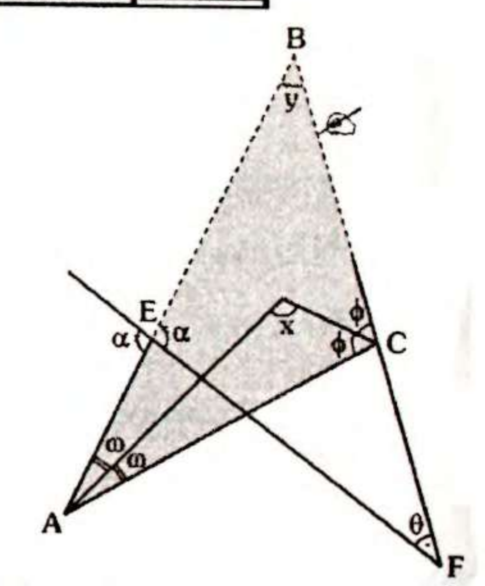
$\Rightarrow m\sphericalangle EAF = m\sphericalangle EFA = m\sphericalangle FGC = \beta$

- En ⊿ABC: $\beta + 2\beta = 90° \Rightarrow \beta = 30°$
- En ΔAEF: $\quad x = 2\beta$

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 236



- Piden: $x_{(\text{menor entero})}$
- Dato: $\alpha + \theta < 170°$
- En ΔEFB, como $\alpha + \theta < 170°$

$\Rightarrow y > 10° \qquad \text{... (I)}$

- En ΔABC, por ángulo entre bisectrices

$$x = 90° + \frac{y}{2}$$

- En (I): $\quad y > 10° \Rightarrow \frac{y}{2} > 5°$

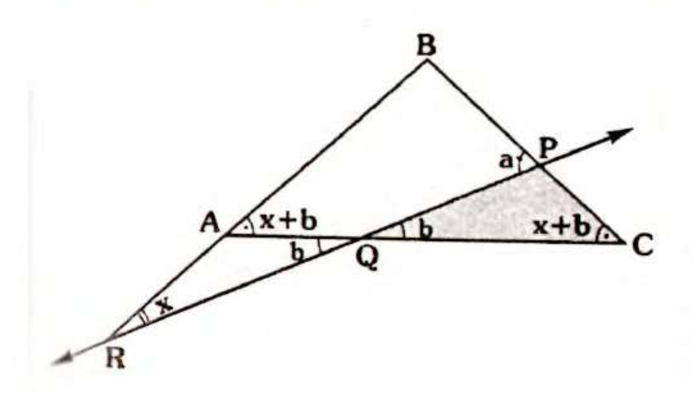
$$\Rightarrow \underbrace{90° + \frac{y}{2}}_{x} > 95°$$

$$\Rightarrow \ x > 95°$$

- El menor valor entero de x es 96°

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 237



- Piden: x en función de a y b
- Dato: ΔABC es isósceles (de base AC)

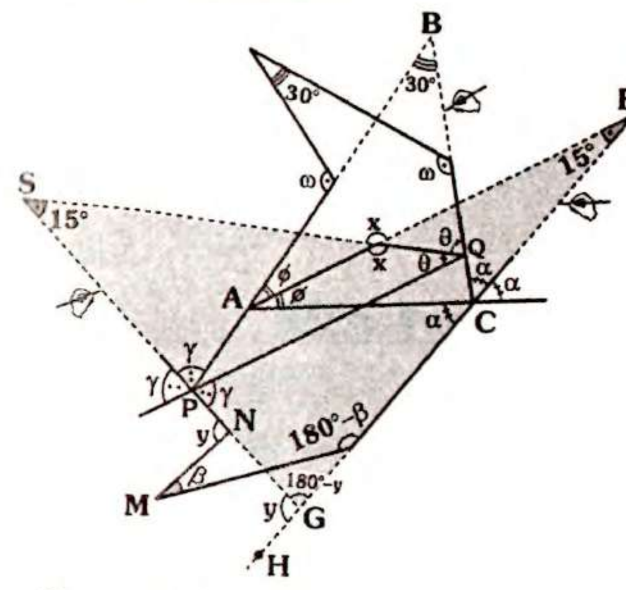
$\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle BCA = x + b$

- En ΔQPC: $x + 2b = a$

$\therefore\ \mathbf{x = a - 2b}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 238



- Se nos pide: $x + y$
- Por teorema 27 (*ángulo entre bisectrices*), en:

$\Delta ABC: m\measuredangle AEC = \dfrac{30°}{2} \Rightarrow m\measuredangle AEC = 15°$

$\Delta PBQ: m\measuredangle PSQ = \dfrac{30°}{2} \Rightarrow m\measuredangle PSQ = 15°$

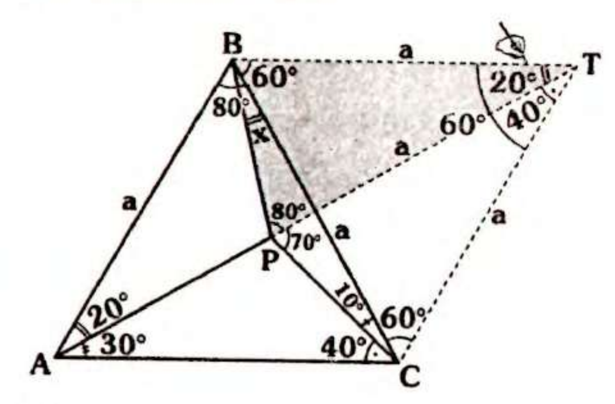
- Se tiene $\overline{MN} // \overline{GC} \Rightarrow m\measuredangle HGS = y$
- En la parte sombreada:

$x = 15° + 15° + 180° - y$

$\therefore\ \mathbf{x + y = 210°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 239



- Piden: x
- Del gráfico AB=BC
- Se prolonga $\overline{AP}$ y se traza $\overline{BT}$ tal que: $m\measuredangle ATB = 20° \Rightarrow BT = a$
- Se tiene entonces $CB = BT$ y $m\measuredangle CBT = 60° \Rightarrow \Delta CTB$ es equilátero

$\Rightarrow CT = a$ y como $m\measuredangle TPC = m\measuredangle PCT = 70°$

$\Rightarrow \Delta PTC$ es isósceles $(PT = TC = a)$

- ΔPTB : isósceles

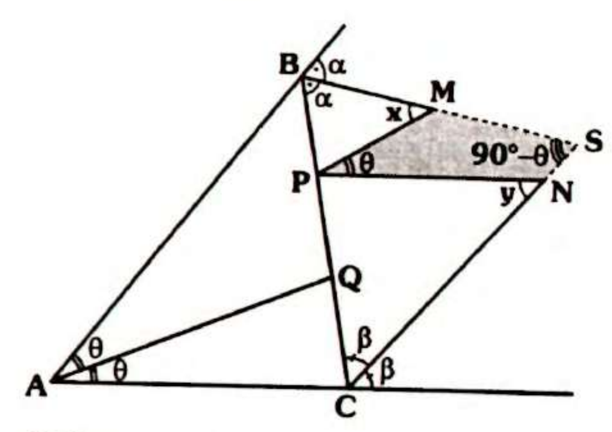
$\Rightarrow m\measuredangle PCB = m\measuredangle BPT = 80°$

$\Rightarrow\ x + 60° = 80°$

$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 240



- Piden: $x+y$
- Como $\overline{PM} // \overline{AQ}$ y

$$\overline{AC} // \overline{PN} \Rightarrow m\measuredangle NPM = \theta$$

- En ΔABC, por ángulo entre bisec-trices (*teorema* 26):

$$m\measuredangle BSC = 90° - \frac{m\measuredangle BAC}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BSC = 90° - \theta$$

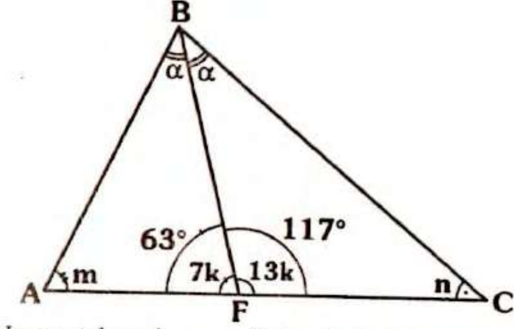
- En ⊳PMSN:

$$x + y = 90° - \theta + \theta$$

$$\therefore \mathbf{x + y = 90°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 241



- Nos piden la medida del menor ángulo interior del ΔABC.
- Dato: ΔABC es escaleno y las medidas de sus ángulos interiores son menores que 80°
- $7k + 13k = 180° \Rightarrow k = 9°$
- Dato: $m < 80°$, $n < 80°$ y

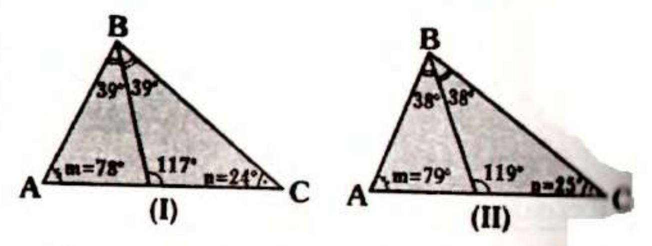
$$2\alpha < 80° \Rightarrow \alpha < 40°$$

- En ΔABF: $m + \alpha = 117°$
- Como:

$$\alpha < 40° \Rightarrow \underbrace{\alpha + m}_{117°} < 40° + m \Rightarrow 77° < m$$

- Del dato: $77° < m < 80°$

m tiene dos valores enteros: 78° y 79°, con ellos tenemos los siguientes triángulos:

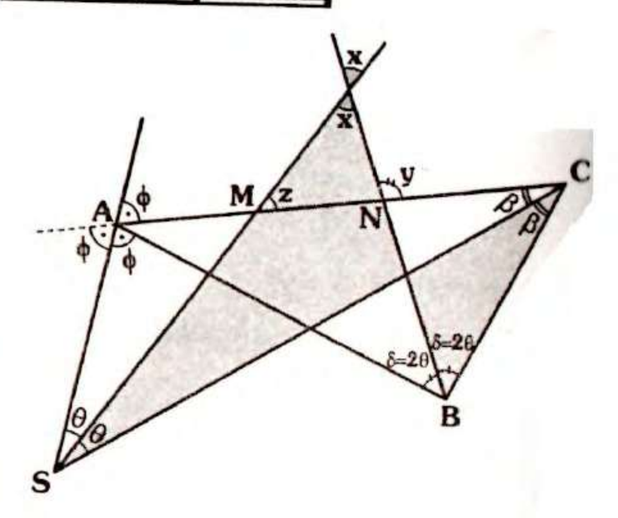


- Pero en el caso I, resulta ser un Δ isósceles, la condición solo cumple el caso II.

Por lo tanto la medida del menor ángulo es **25°**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 242



- Piden: $\frac{x}{y}$
- En ΔABC, por ángulo entre bisec-trices (teorema 27):

$$m\measuredangle ASC = \frac{m\measuredangle ABC}{2} \Rightarrow \delta = 2\theta$$

- En ΔSMC: $z = \beta + \theta$
- En la parte sombreada:

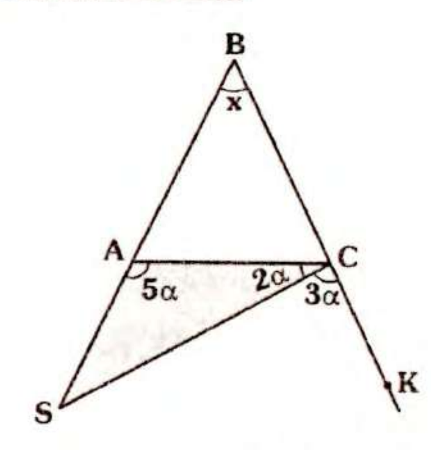
$$x + \theta = \beta + 2\theta \Rightarrow x = \beta + \theta$$

- Luego: $x = z$
- En ΔMLN: $y = x + z \Rightarrow y = 2x$

$$\therefore \ \frac{x}{y} = 2$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 243



- Nos piden el mayor valor entero de x
- En ΔACS: $3\alpha > x$
- Analicemos las restricciones para α:
- Como ΔABC es isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACK = 5\alpha$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC < 90° \Rightarrow 5\alpha > 90°$$

$$\Rightarrow \alpha > 18° \quad \dots (I)$$

- $5\alpha < 180° \qquad \Rightarrow \alpha < 36° \quad \dots (II)$

. En ΔACB:

$$5\alpha + 2\alpha < 180° \Rightarrow \alpha < \frac{180°}{7} \quad \dots (III)$$

- De (I), (II) y (III):

$$18° < \alpha < \frac{180°}{7}$$

- Como: $x < 3\alpha$ y

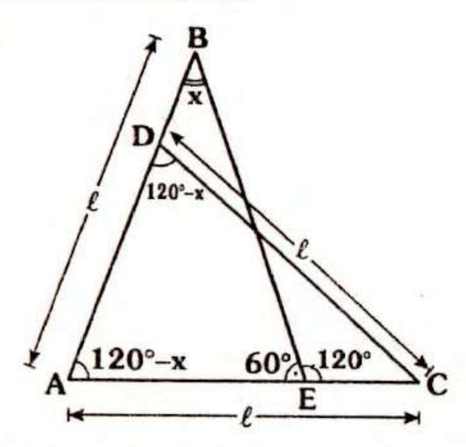
$$\alpha < \frac{180°}{7} \Rightarrow 3\alpha < \frac{540°}{7}$$

$$\Rightarrow x < \frac{540°}{7} \Rightarrow x < 77{,}1°$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de x es **77°**.

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 244



- Nos piden la cantidad de valores enteros de x .
- En ΔACD isósceles

$$120° - x < 90° \Rightarrow 30° < x \quad \dots (I)$$

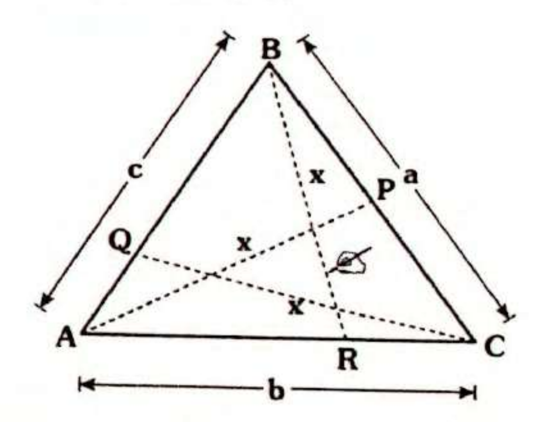
- En ΔAEB:

$$AE < \ell \Rightarrow x < 60° \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II): $30° < x < 60°$
- La cantidad de valores enteros es **19**.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 245



- Nos piden el intervalo para x.
- Dato: AP = CQ = BR

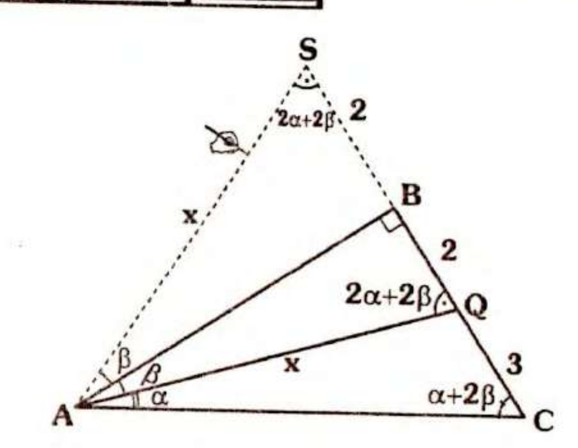
$$\frac{a+b+c}{2}=p$$

- Por teorema:

$$p-a<x<p$$
$$p-b<x<p$$
$$p-c<x<p$$
$$\Rightarrow 3p-\underbrace{(a+b+c)}_{2p}<3x<3p$$
$$\therefore \frac{p}{3}<x<p$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 246



- Piden: x
- Dato: $2\alpha+3\beta=90°$
- Se prolonga $\overline{CB}$ y se traza $\overline{AS}$, tal que:

$$m\sphericalangle ASB=2\alpha+2\beta\Rightarrow AQ=AS=x$$

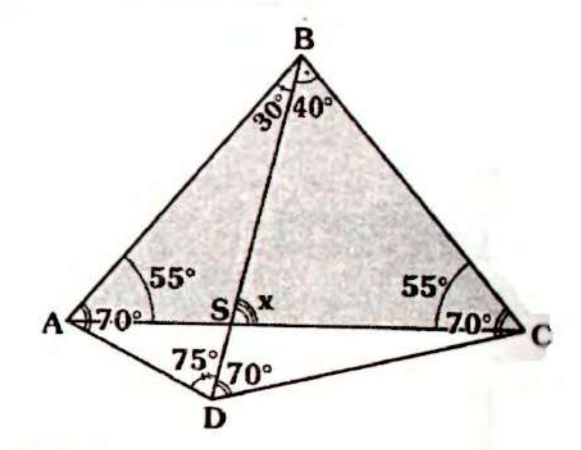
y $SB=BQ=2$

- Como: $m\sphericalangle CAS=m\sphericalangle ACS=\alpha+2\beta$

$$\Rightarrow AS=SC$$
$$\therefore x=7$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 247



- Piden: x
- De los datos, se verifica:

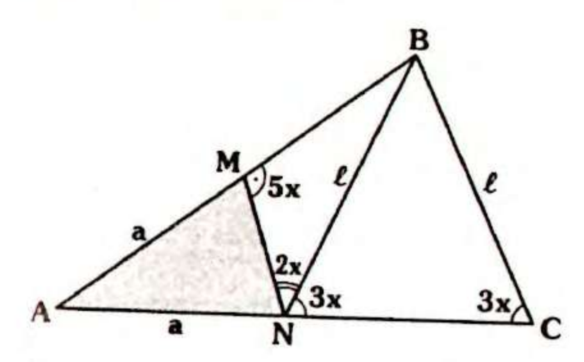
$$m\sphericalangle BDC=m\sphericalangle DCB=70°$$
$$m\sphericalangle BDA=m\sphericalangle DAB=75°$$
$$\Rightarrow AB=BD=BC=\ell$$
$$\Rightarrow \triangle ABC: \text{isósceles}$$
$$\Rightarrow m\sphericalangle BAC=m\sphericalangle ACB=55°$$

- En $\triangle SAB$:

$$x=30°+55°$$
$$\therefore x=85°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 248



- Nos piden el número de valores enteros de m∢BNM.
- En el gráfico:

$$m\sphericalangle BNM = 2x$$

- Analicemos todas las restricciones para x:

En ΔAMN (isósceles)

$$5x > 90° \Rightarrow x > 18° \qquad \ldots \text{(I)}$$

En ΔBNC (isósceles)

$$3x < 90° \Rightarrow x < 30° \qquad \ldots \text{(II)}$$

En ΔNMB :

$$2x + 5x < 180° \Rightarrow x < \frac{180°}{7} \qquad \ldots \text{(III)}$$

$$18° < x < \frac{180°}{7}$$

$$\Rightarrow 36° < \underbrace{2x} < \frac{360°}{7}$$

$$36° < m\sphericalangle BNM < 51{,}43°$$

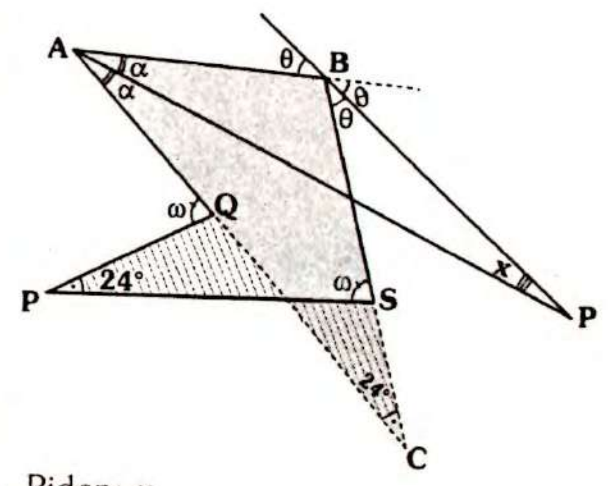
El conjunto de valores enteros de m∢BNM es:

$$\{37°;38°;39°;\ldots 50°;51°\}$$

El número de valores enteros es **15.**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 249

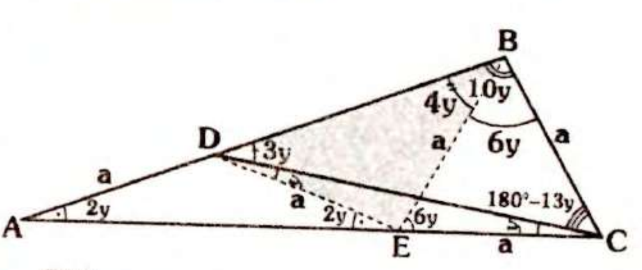


- Piden: x
- Al prolongar $\overline{AQ}$ y $\overline{BS}$ se cortan en C, se cumple: m∢QCS = 4°
- En ΔABC, por ángulo entre bisectrices (teorema 27):
- En ΔABC: $m\sphericalangle APB = \dfrac{m\sphericalangle AC\theta}{2}$

$$\therefore \mathbf{x = 12°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 250



- Piden: y
- En ΔADC, como m∢DAC = 2(m∢DCA)

Se traza $\overline{DE}$ tal que m∢CDE = y

$$\Rightarrow AD = DE = EC = a$$

- En ΔECB, como EC=CB y

$$m\sphericalangle ECB = 180° - 12y$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BEC = m\sphericalangle EBC = 6y$$

- ΔDEB : isósceles $\Rightarrow DE = EB = a$

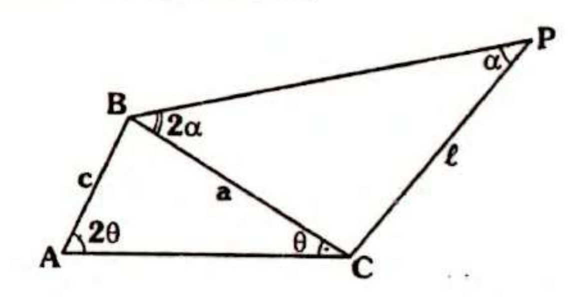
$\Rightarrow \Delta EBC$: equilátero

$\Rightarrow 4y = 60°$

$\therefore\ \mathbf{y = 15°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 251



- Nos piden la relación entre c y ℓ.
- Por teorema 39:

En ΔBCP: $\ell < 2a$ ... (I)

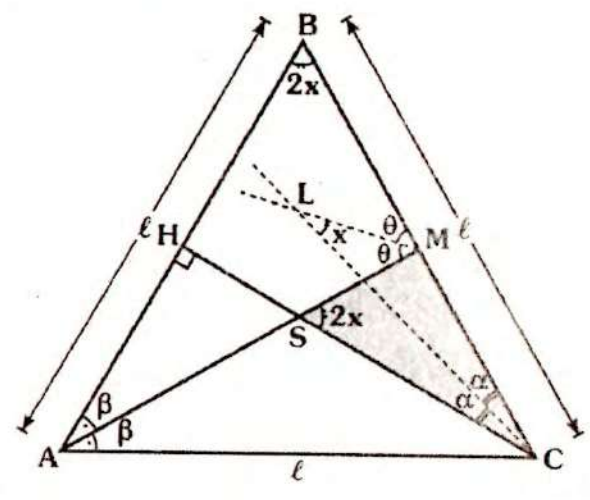
En ΔABC: $a < 2c \Rightarrow 2a < 4c$ ... (II)

- De (I) y (II): $\ell < 2a < 4c$

$\therefore\ \mathbf{\ell < 4c}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 252



- Piden: $m\measuredangle ABC$
- Dato: $AB = BC$ y $m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle MLC)$

- En ΔCMS, por ejemplo entre bisectrices (*teorema* 27):

$$m\measuredangle MLC = \frac{m\measuredangle MSC}{2} \Rightarrow m\measuredangle MSC = 2x$$

- Luego, como $m\measuredangle ABC = m\measuredangle MSC$

$\Rightarrow m\measuredangle AMB = 90°$

- Como: $\beta + 2x = 90° \Rightarrow m\measuredangle ACB = 2x$

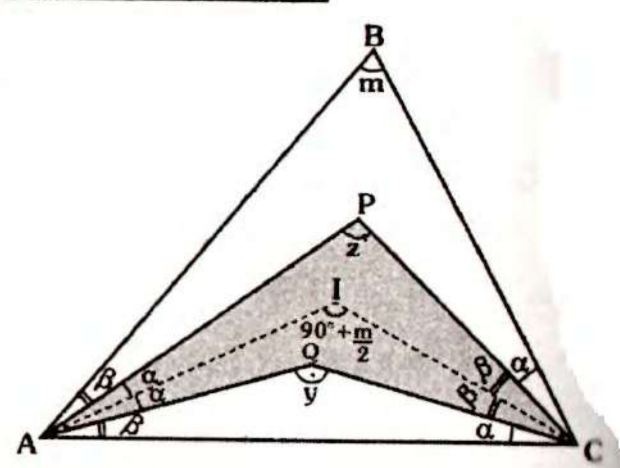
$\Rightarrow AB = AC$

- ΔABC: equilátero $\Rightarrow 2x = 60°$

$\therefore\ \mathbf{m\measuredangle ABC = 60°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 253



- Piden el mayor valor entero de: $x + y$
- Dado: ΔABC es acutángulo
- Se traza las bisectrices de los ángulos BAC y ACB, las cuales se cortan en I.
- Por teorema 25:

$$m\measuredangle AIC = 90° + \frac{m}{2}$$

- En la parte sombreada, por teorema 29:

$$\frac{x + y}{2} = 90° + \frac{m}{2}$$

- Como ΔABC es acutángulo $\Rightarrow$ $m < 90°$

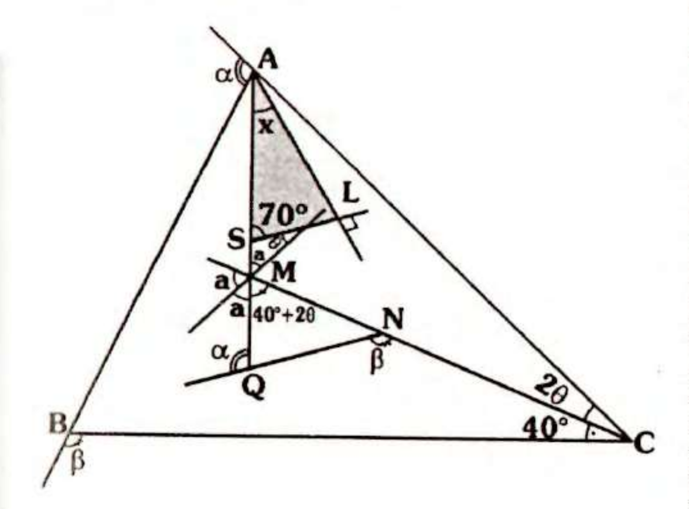
$$\frac{m}{2} < \frac{90°}{2} \Rightarrow \underbrace{90° + \frac{m}{2}}_{\frac{x+y}{2}} < 135°$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{2} < 135° \Rightarrow x + y < 270°$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de $x + y$ es: **269°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 254



- Piden: x
- En ΔABC y ΔMNQ, tienen dos partes de ángulos exteriores respectivamente iguales:

$$\Rightarrow m\measuredangle ACB = m\measuredangle QMN = 40° + 2\theta$$

$$\Rightarrow 2a + 40° + 2\theta = 180° \Rightarrow a + \theta = 70°$$

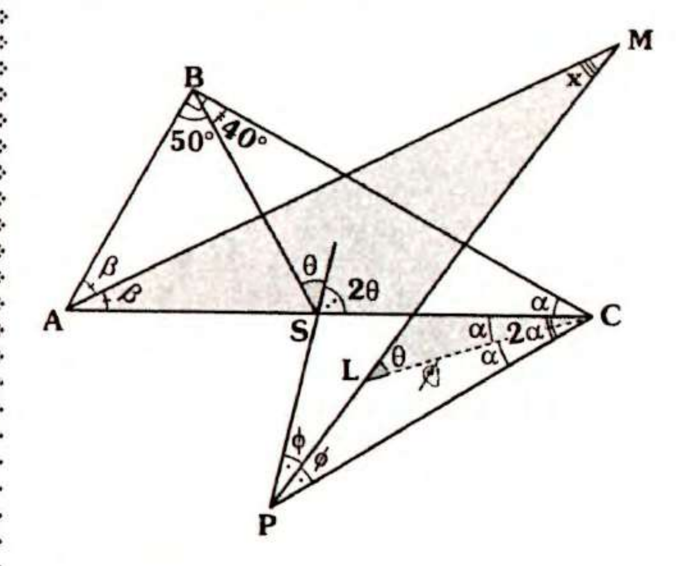
- En ◺ALS:

$$x + 70° = 90°$$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 255



- Nos piden **x** en función de β.
- En ΔPCS se traza $\overline{CL}$, bisectriz del

$$\measuredangle SCP \Rightarrow 2\theta = 2\alpha + 2\phi \Rightarrow \theta = \alpha + \phi$$

- En ΔPLC: $m\measuredangle MLC = \underbrace{\alpha + \phi}_{\theta}$
- En la parte sombreada (⧖):

$$x + \beta = \alpha + \theta \qquad \text{... (I)}$$

- En ◺ABC: $\alpha = 90° - 2\beta$
- En ΔABS:

$$3\theta = 2\beta + 50° \Rightarrow \theta = \frac{2\beta + 50°}{3}$$

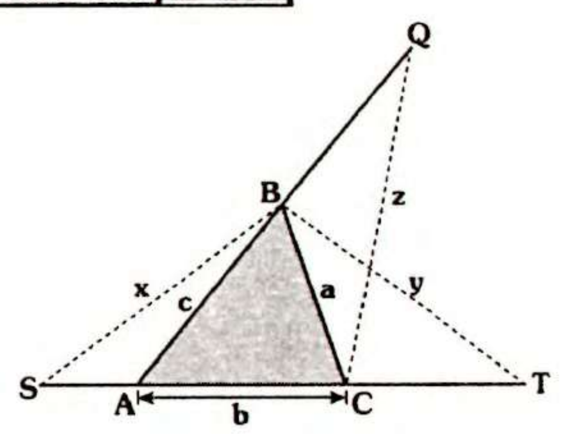
- En (I):

$$x + \beta = (90° - 2\beta) + \frac{(2\beta + 50°)}{3}$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{320° - 7\beta}{3}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 256



- Piden el menor valor entero de:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}$$

- Dato: $\frac{a+b+c}{2}=p$

$$xyz=\frac{1}{k^3}$$

- Sea: $E=\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}$

- Por teorema 44:

$$y>p-c$$
$$x>p-a$$
$$z>p-b$$

- Multiplicando:

$$xyz>(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^3}>(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}>\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Usando el siguiente teorema: $MG \geq MH$ para $(p-a),(p-b)$ y $(p-c)$

$$\frac{1}{k}>\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}\geq\frac{3}{\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}>\frac{3}{\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}}$$

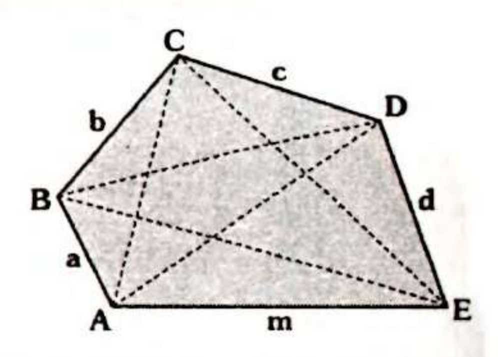
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}}_{E}>3k$$

$$\Rightarrow E>3k$$

- Como k es entero, el menor valor entero de k es $\mathbf{3k+1}$.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 257



- Piden entre que valores esta:

$$AC+BD+CE+DA+EB$$

- Dato: $m>d>c>b>a$

$$a+b+c+d+m=\ell$$

- Por existencia en:

$\Delta ABC:\ b-a<AC<a+b$

$\Delta BCD:\ c-b<BD<b+c$

$\Delta CDE:\ d-c<CE<d+c$

$\Delta ADE:\ m-d<AD<m+d$

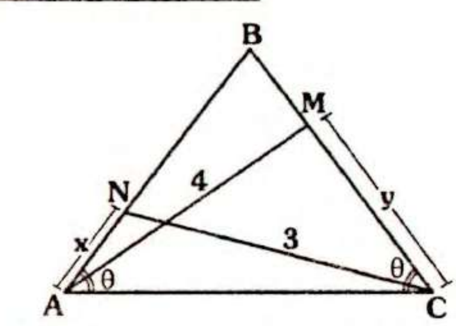
$\Delta ABE:\ m-a<EB<m+a$

- Sumando:

$$2m-2a<AC+BD+CE+AD+EB<2\ell$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 258



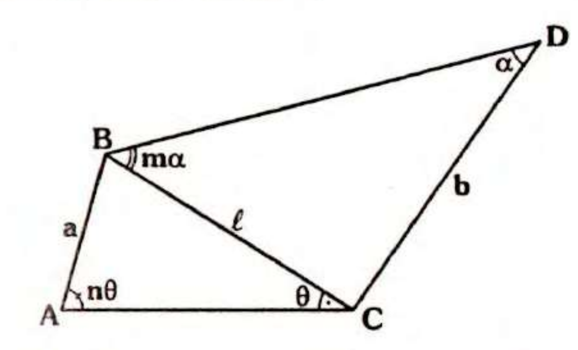
- Piden el mayor valor entero de: $x + y$
- Dato: $AB = BC$
- Por observación indicado en teorema 45:

$$\Delta ANC: \quad x < 3$$
$$\Delta AMC: \quad y < 4$$
$$\Rightarrow x + y < 7$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de $x + y$ es: **6**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 259



- Nos piden la relación entre a, b, m y n.
- Por teorema 56, en:

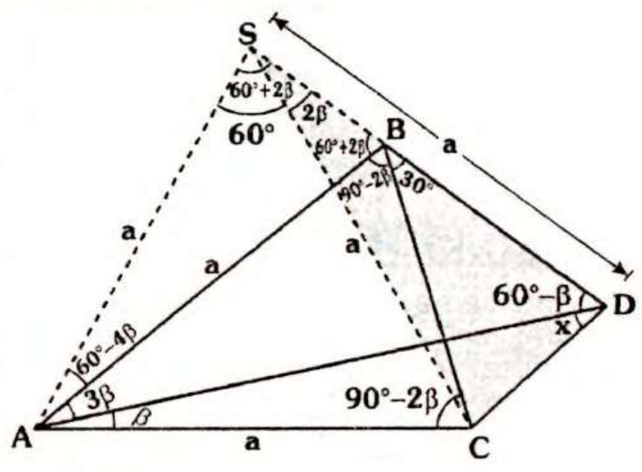
$$\Delta BCD: \quad b < m\ell \quad \dots (I)$$

- $\Delta ABC: \quad \ell < na \Rightarrow m\ell < mna \quad \dots (II)$
- De (I) y (II): $b < m\ell < mna$

$$\therefore \mathbf{b < mna}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 260



- Piden: x
- Completamos ángulos, se tiene:

$m\measuredangle ABC = m\measuredangle ACB = 90° - 2\beta \Rightarrow AB = AC$

- También: $m\measuredangle ADB = 60° - \beta$
  y $m\measuredangle ABS = 60° - 2\beta$
- Se traza $\overline{AS}$ tal que:

$m\measuredangle ASB = 60° + 2\beta \Rightarrow AB = AS$ y
$m\measuredangle SAC = 60°$

$\Rightarrow \Delta ASC$: equilátero $\Rightarrow m\measuredangle CSD = 2\beta$ y

$CS = SD = a \Rightarrow \Delta CSD$: isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle SDC = m\measuredangle SCD = 90° - \beta$$

$$\Rightarrow 60° - \beta + x = 90° - \beta$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave C



Solucionario

Ciclo Repaso

RESOLUCIÓN Nº 261

- Analicemos las proposiciones

I. Como un triángulo se obtiene a partir de tres puntos no colineales, entonces el mayor número de triángulos que se obtiene con 8 puntos como vértices es:

$$C_3^8 = 56$$

La proposición es verdadera.

II. A partir del estudio de naturaleza del triángulo, como: $4^2 > \sqrt{7}^2 + 2^2$, el triángulo es obtusángulo.

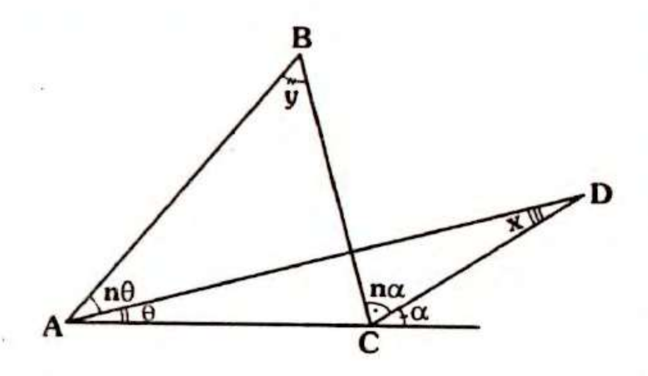
La proposición es verdadera.

III. Un triángulo escaleno puede ser oblicuángulo (obtusángulo o acutángulo) o rectángulo.

La proposición es falsa.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 262



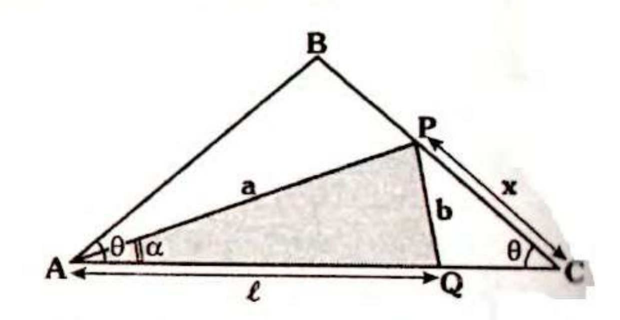
- Piden x, en función de "n" e "y"
- En ΔADC: $x = \alpha - \theta$
- En ΔABC: $y = (n+1)\alpha - (n+1)\theta$

$$\Rightarrow y = (n+1)(\underbrace{\alpha - \theta}_{x})$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{y}{n+1}}$$

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN Nº 263



- Nos piden el mayor valor entero de x
- Dato: $a + b + \ell = 20$
- En ΔAPC: como $\alpha < \theta \Rightarrow x < a$ ... (I)
- En ΔAPQ: $a < b + \ell \Rightarrow 2a < \underbrace{a + b + \ell}_{20}$

$$\Rightarrow a < 10 \quad \text{... (II)}$$

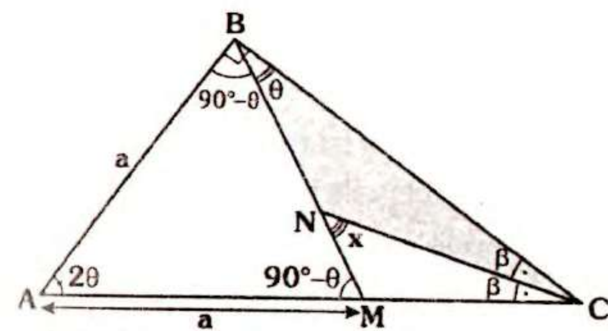
- De (I) y (II):

$$x < a < 10 \Rightarrow x < 10$$

- Por lo tanto el mayor valor entero de x, es **9**

Clave [illegible]

RESOLUCIÓN Nº 264



- Piden: x
- $\triangle CBN: x = \beta + \theta$
- $\triangle ABM$: isósceles

$$m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle AMB = 90 - \theta$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAC = 2\theta$$

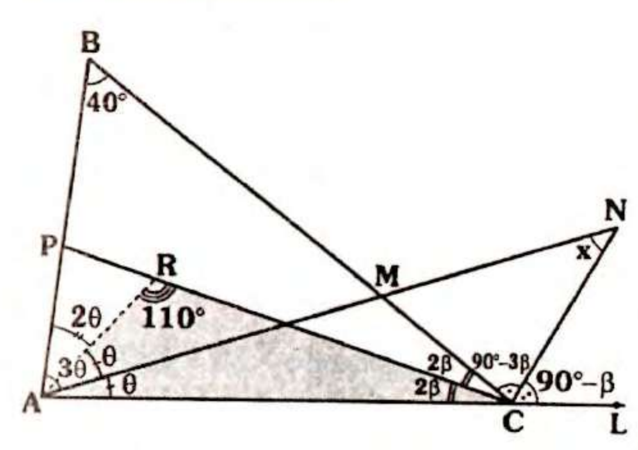
- En ◺ABC: $2\beta + 2\theta = 90°$

$$\Rightarrow \beta + \theta = 45°$$

$$\therefore \mathbf{x = 45°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 265



- Piden: x
- De los datos:

$$m\sphericalangle BCN = 90° - 3\beta$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle PCN = m\sphericalangle NCL = 90° - \beta$$

- Se traza $\overline{AR}$ tal que $m\sphericalangle BAR = 2\theta$
- Por ángulo entre bisectrices, en:

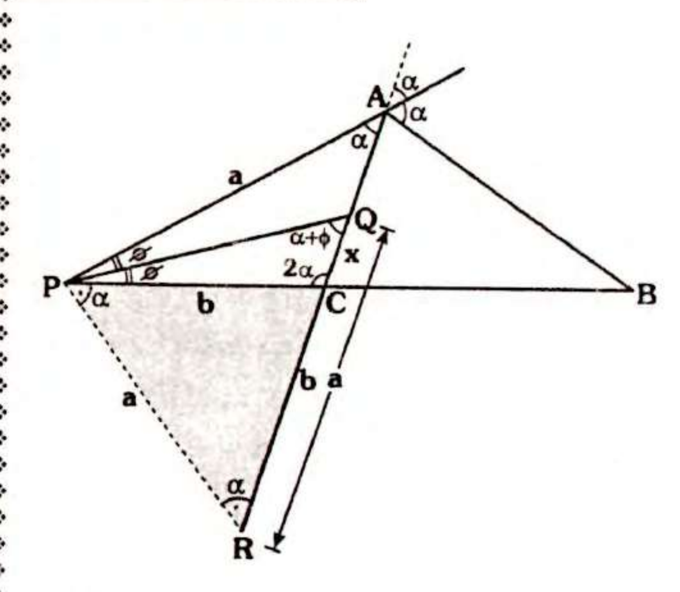
$$\triangle ABC: \; m\sphericalangle ARC = 90° + \frac{40°}{2} = 110°$$

$$\triangle ARC: \; m\sphericalangle ANC = \frac{110}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x = 55°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 266



- Piden: x
- Dato: $a - b = 1$ y $AB = BC$
- Como:

$$AB = BC \Rightarrow m\sphericalangle PCA = 2\alpha$$

- En $\triangle PCA$, se tiene:

$$m\sphericalangle PCA = 2(m\sphericalangle PAC)$$

- Se prolonga $\overline{AC}$ y se traza $\overline{PR}$ tal que $m\sphericalangle PRC = \alpha$

$$\Rightarrow PC = RC = b \quad y \quad PA = RP = a$$

- En ΔPQR, se tendrá:

$$m\measuredangle QPR = m\measuredangle PQR = \alpha + \phi$$

$$\Rightarrow RQ = a$$

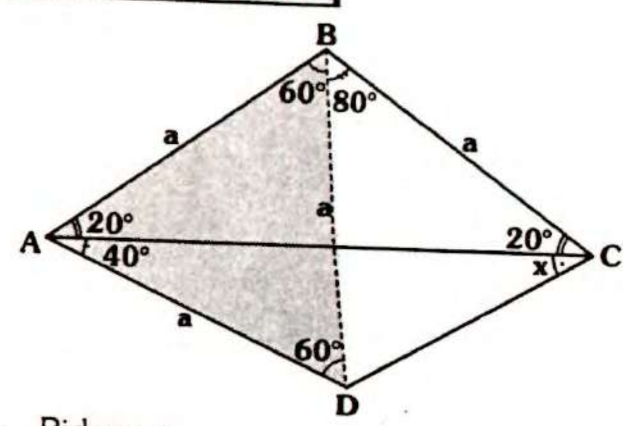
$$x + b = a$$

$$\Rightarrow \quad x = a - b$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 1}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 267



- Piden: x
- Del dato: AB=AD y

$m\measuredangle BAD = 60° \Rightarrow \Delta ABD$

equilátero $\Rightarrow BD = a$ y $m\measuredangle DBC = 80°$

- ΔBDC : isósceles

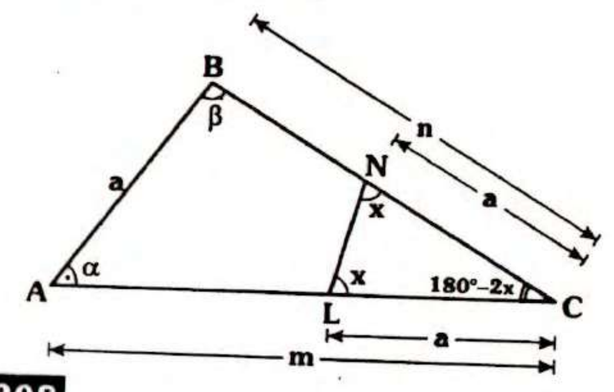
$$\Rightarrow m\measuredangle BDC = m\measuredangle BCD = 50°$$

$$\Rightarrow \quad x + 20° = 50°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 268



- Nos piden el menor valor entero de x
- Se tiene $\alpha + \beta = 2x$
- Por teorema de la correspondencia, en el triángulo ABC:

- Como $m > a \Rightarrow \beta > 180° - 2x \quad \ldots (I)$

$n > a \Rightarrow \alpha > 180° - 2x \quad \ldots (II)$

- Sumando (I) y (II):

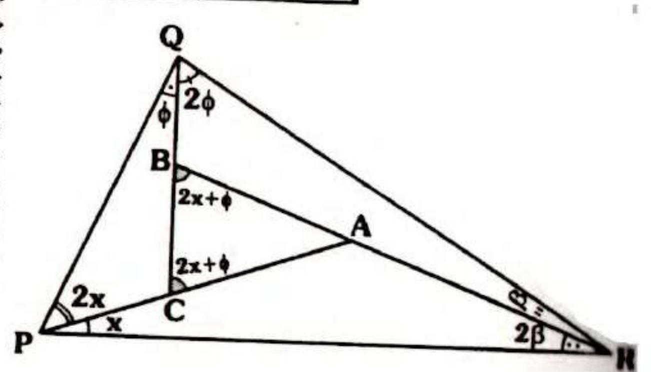
$$\underbrace{\alpha + \beta}_{2x} > 360° - 4x$$

$$\Rightarrow x > 60°$$

- Por lo tanto el menor valor entero de x es **61°**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 269



- Piden: x
- Dato: AB=BC

$$\Rightarrow m\measuredangle ABC = m\measuredangle BCA$$

$$2\phi + \beta = 2x + \phi \Rightarrow \phi + \beta = 2x$$

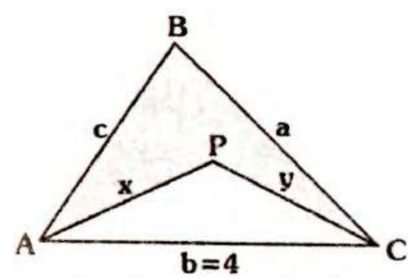
- En ΔPQR: $3x + 3\phi + 3\beta = 180°$

$$\Rightarrow x + \underbrace{\phi + \beta}_{2x} = 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 270



Piden el valor entero de $x+y$

Dato:

- $a+b+c=10$
- b, toma su mayor valor entero

En ΔABC:

$$b<a+c \Rightarrow 2b<\underbrace{a+b+c}_{10}$$

$$\Rightarrow b<5$$

- Del dato: $b=4 \Rightarrow a+c=6$
- En la parte sombreada, por teorema 41:

$$x+y<a+c$$

$$\Rightarrow x+y<6 \qquad \ldots \text{(I)}$$

- En ΔAPC: $\quad 4<x+y \qquad \ldots \text{(II)}$
- De (I) y (II):

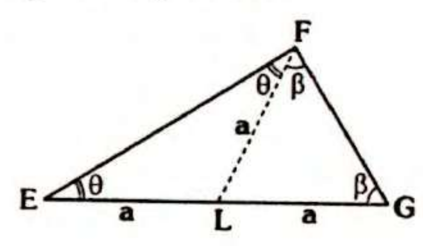
$$4<x+y<6$$

- Por lo tanto el valor entero de $x+y$, es **5**.

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 271

Analicemos las proposiciones a partir del siguiente gráfico:

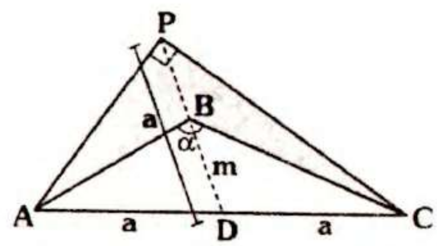


Si : $EL=LG=LF$

$2\theta+2\beta=180° \Rightarrow \theta+\beta=90°$

$\Rightarrow m\measuredangle EFG=90°$

I.

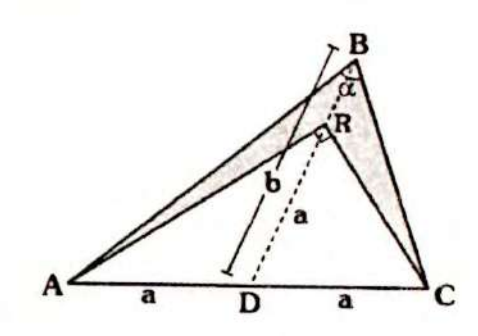


- Como $m<a \Rightarrow$ se prolonga $\overline{DB}$ tal que $DP=a \Rightarrow m\measuredangle APC=90°$
- En $\triangle$: $\alpha>90°$

La proposición es verdadera.

II. La proposición es verdadera, es consecuencia del primer gráfico.

III.

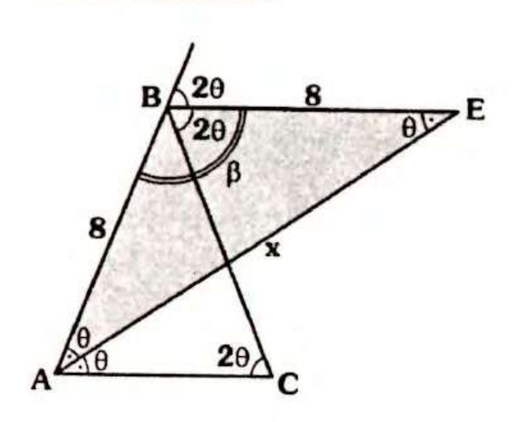


- Como $b>a \Rightarrow$ se ubica R en $\overline{BD}$, tal que $DR=a \Rightarrow m\measuredangle ARC=90°$
- En $\triangle$: $\alpha<90°$

La proposición es verdadera.

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 272



- Nos piden la suma del mayor y menor valor entero de x.
- Como $AB = BC \Rightarrow \overline{BE} // \overline{AC}$

$$m\measuredangle BAE = m\measuredangle BEA \Rightarrow AB = BE = 8$$

- En ΔABE: $x < 8 + 8 \Rightarrow x < 16$ ... (I)
- Como el triángulo ABC es isósceles:

$$\Rightarrow 2\theta < 90° \Rightarrow \beta > 90°$$

- Por teorema 21:

$$x^2 > 8^2 + 8^2$$

$$x > 11{,}31 \qquad \text{... (II)}$$

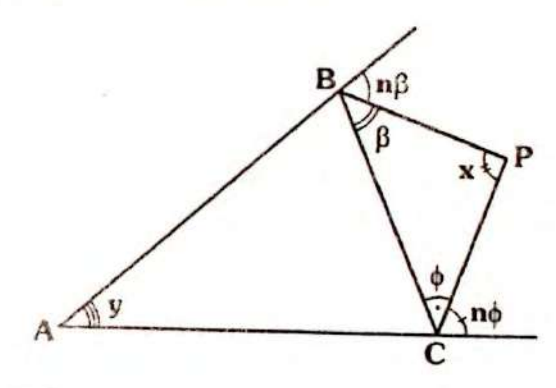
- De (I) y (II):

$$11{,}31 < x < 16$$

- Por lo tanto en mayor valor de x es 15 y el menor es 12. Luego la suma pedida es 27.

Clave C

Resolución Nº 273



- Piden: x
- ΔBPC: $x + \phi + \beta = 180°$
- En (ABPC):

$$n(\phi + \beta) = x + y$$

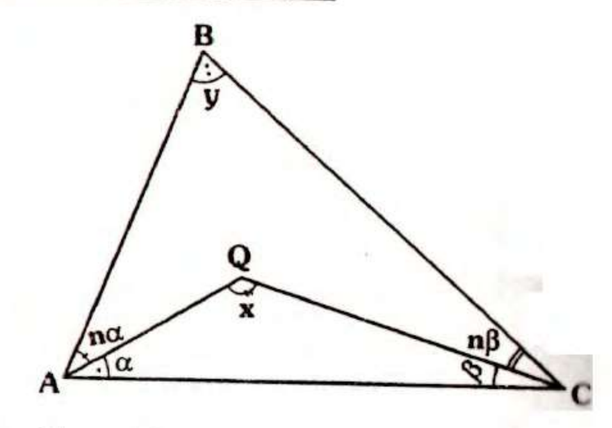
$$\Rightarrow \phi + \beta = \frac{x + y}{n}$$

$$\Rightarrow x + \frac{(x + y)}{n} = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{1}{n+1}(180°n - y)}$$

Clave C

Resolución Nº 274



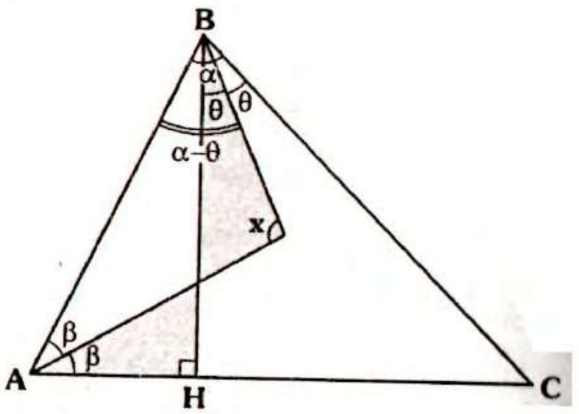
- Nos piden: x
- En ΔAQC: $x + \alpha + \beta = 180°$
- En ABCQ: $x = y + n\alpha + n\beta$

$$\Rightarrow \frac{x - y}{n} = \alpha + \beta \quad \Rightarrow x + \frac{x - y}{n} = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{1}{n+1}(180°n + y)}$$

Clave C

Resolución Nº 275



- Piden: x en función de α.

- En $\triangle ABP$:

$$x+\beta+\alpha-\theta=180° \quad \ldots (I)$$

- En la parte sombreada:

$$x+\theta=90°+\beta \quad \ldots (II)$$

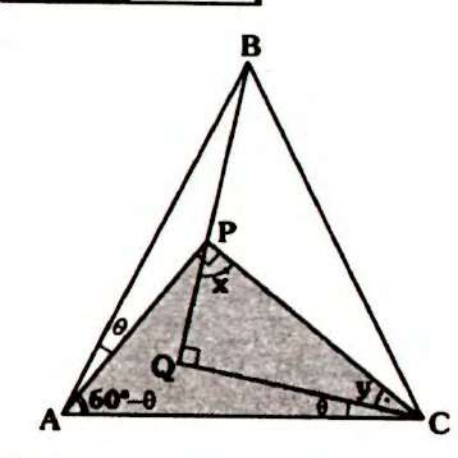
- Sumando (I) y (II):

$$2x+\alpha=270°$$

$$\therefore \mathbf{x=135°-\frac{\alpha}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 276



- Piden: x
- En ◺APC: $y+\theta+60°-\theta=90°$

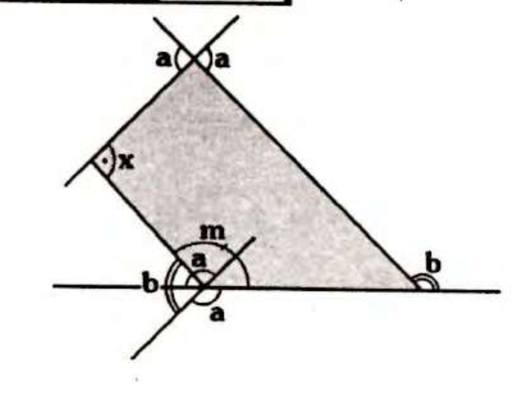
$$\Rightarrow y=30°$$

- En ◺PQC: $x+y=90°$

$$\therefore \mathbf{x=60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 277



- Piden: x
- Dato: $a+b=250°$
- Del gráfico: $a+b+m=360°$

$$\Rightarrow m=110°$$

- En la parte sombreada:

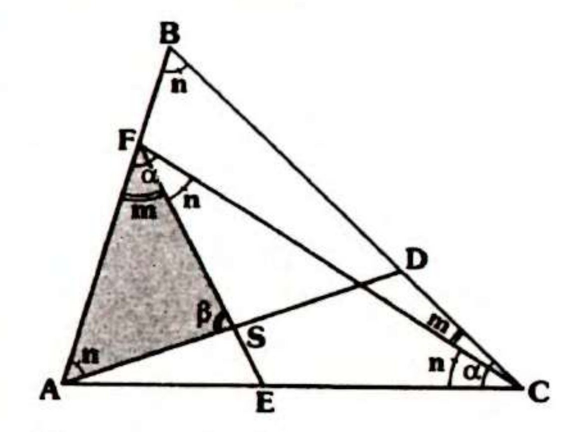
$$x+m=a+b$$

$$\Rightarrow x+110°=250°$$

$$\therefore \mathbf{x=140°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 278



- Piden: $\alpha+\beta$
- Dato: $EF=EC$ y $AD=DB$

$$\Rightarrow m\sphericalangle EFC=m\sphericalangle ECF=n$$

- Como: $m+n=\alpha \Rightarrow m\sphericalangle FCB=m$
- En $\triangle FBC$: $m\sphericalangle CBF=n$
- En $\triangle ADB$, como $AD=BD$

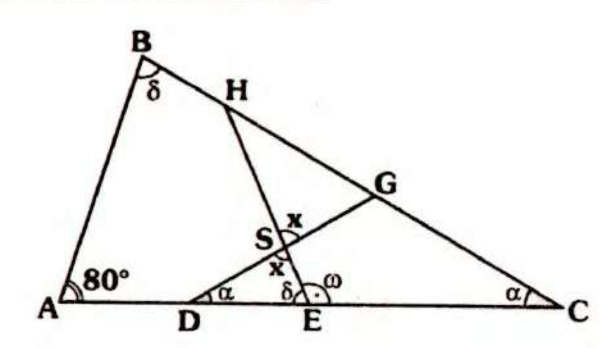
$$\Rightarrow m\sphericalangle DAB=n$$

- En $\triangle ABS$: $\underbrace{m+n}_{\alpha}+\beta=180°$

$$\therefore \mathbf{\alpha+\beta=180°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 279



- Piden: x
- Dato: $\delta + \omega = 180°$ y $DG = GC$

$$\Rightarrow m\measuredangle GDC = m\measuredangle DCG$$

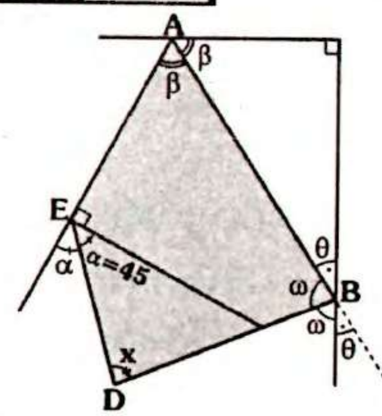
- En ΔABC: $\alpha + \delta + 80° = 180°$ ...(I)
- En ΔDSE: $\alpha + \delta + x = 180°$ ...(II)

De (I) y (II):

$$\mathbf{x = 80°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 280



- Piden **x** en función de θ.
- En ⏢EABD:

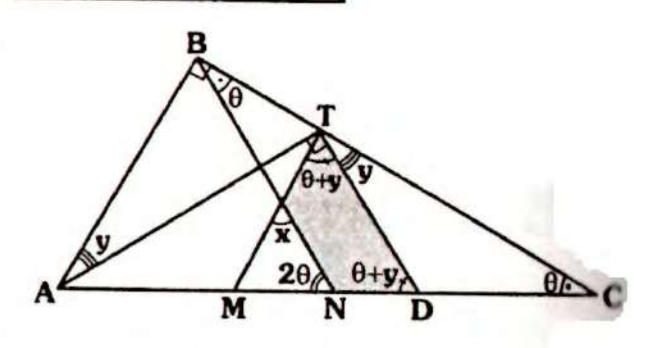
$$x + \beta = 45° + \omega + \theta$$

- Pero: $\beta = 90° - \theta$ y $\omega = 90° - \dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore \mathbf{x = 45° + \frac{3}{2}\theta}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 281



- Piden: $\dfrac{x}{y}$
- Dato: $MT = MD$ y $NB = NC$

$$\Rightarrow m\measuredangle NBC = m\measuredangle NCB = \theta$$

$$y \quad m\measuredangle MTD = m\measuredangle TDM = \theta + y$$

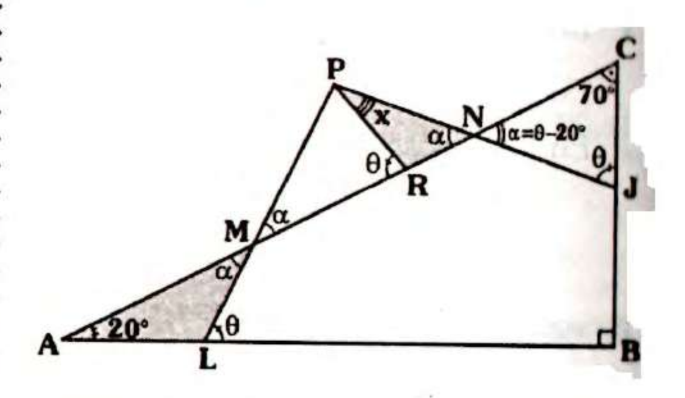
- En ⏢NSTD:

$$x + \cancel{2\theta} = \cancel{2\theta} + 2y$$

$$\therefore \mathbf{\frac{x}{y} = 2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 282



- Piden: $x + \theta$
- Dato: $MP = PN$
- En ◺ABC: $m\measuredangle BAC = 20°$
- En ΔALM: $\alpha + 20° = \theta$ ... (I)
- En ΔRNP: $\alpha + x = \theta$ ... (II)

- De (I) y (II): $x+\alpha=\alpha+20°$

$$\Rightarrow x=20°$$

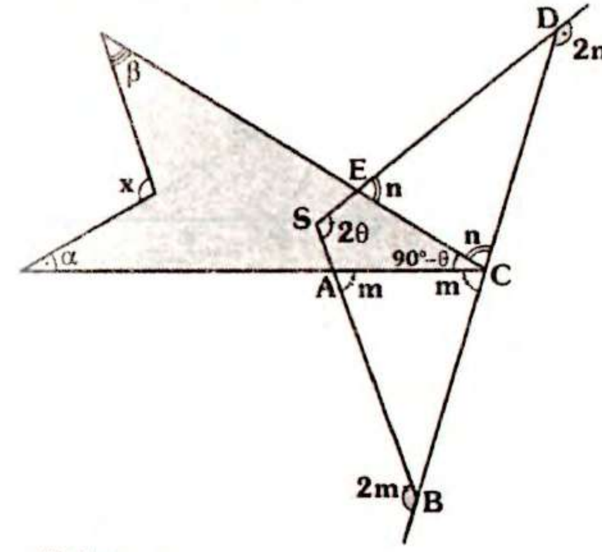
- En ΔNJC:

$$70°+\theta+\theta-20°=180° \Rightarrow \theta=65°$$

$$\therefore\ \mathbf{x+\theta=85°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 283



- Piden: x
- Dato: $\alpha+\beta-\theta=70°$

  AB=BC y ED=DC
- En ΔBSD: $2m+2n=180°+2\theta$

$$\Rightarrow m+n=90°+\theta$$

- Luego: $m\measuredangle ECA=90°-\theta$
- En la región sombreada:

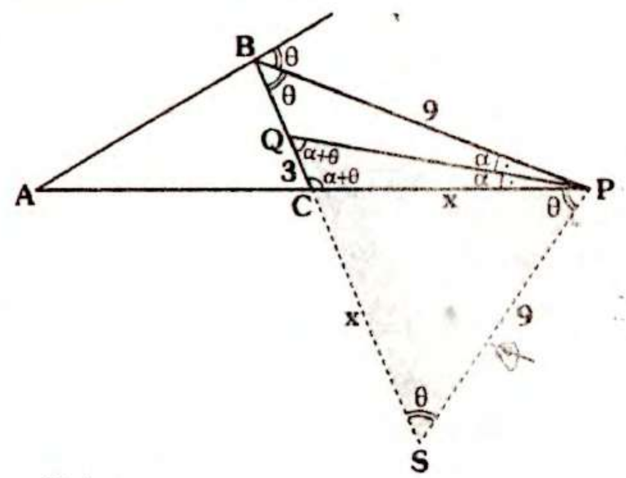
$$x=\alpha+\beta+90°-\theta$$

$$\Rightarrow x=90°+\underbrace{\alpha+\beta-\theta}_{70°}$$

$$\therefore\ \mathbf{x=160°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 284



- Piden: x
- Dato: AB=AC
- En ΔBCP:

$$m\measuredangle BCP=2(m\measuredangle CBP)$$

- Se prolonga $\overline{BC}$ y se traza $\overline{PS}$ tal que:

$$m\measuredangle PSC=\theta \Rightarrow PS=9$$

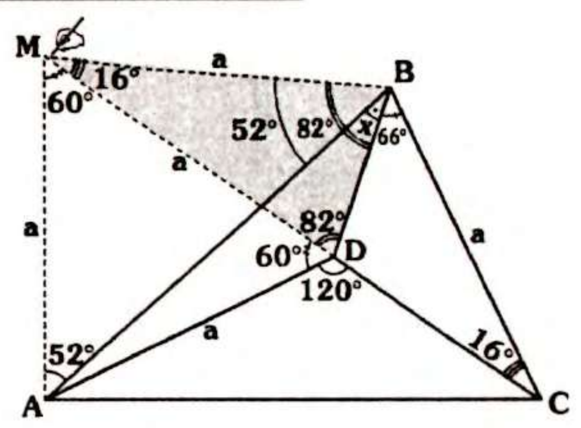
- ΔCSP: isósceles $\Rightarrow CS=CP=x$
- En ΔSQP: QS=SP

$$x+3=9$$

$$\therefore\ \mathbf{x=6}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 285



- Piden: x

- Al prolongar $\overline{CD}$ nos damos cuenta:

$m\sphericalangle MDB = 86°$ y $m\sphericalangle BCD = 16°$

(Corresponde a uno de los criterios de trazos auxiliares)

- Se traza $\overline{BM}$ tal que:

$m\sphericalangle BMD = 16° \Rightarrow BC = BM = MD$

- Como $MD = DA$ y $m\sphericalangle ADM = 60°$

$\Rightarrow \Delta ADM$ es equilátero

$\Rightarrow AM = MB = a$

- ΔAMB: isósceles

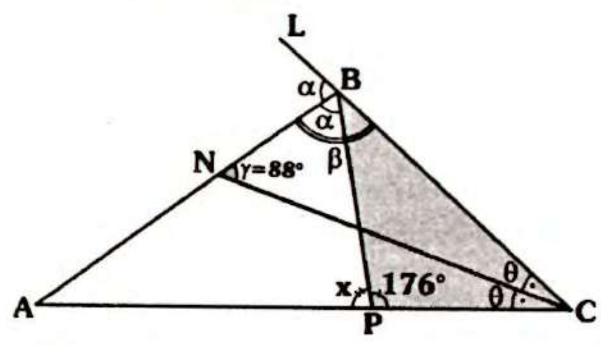
$\Rightarrow m\sphericalangle MAB = m\sphericalangle ABM = 52°$

- En ΔDMB: $x + 52° = 82°$

$\therefore \mathbf{x = 30°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 286



- Piden: x
- Dato: $\beta + \alpha = 180°$ y γ es el mayor entero par
- Como $\alpha + \beta = 180°$, al prolongar $\overline{CB}$, se cumple $m\sphericalangle ABL = \alpha$, también tendremos $2\alpha < 180° \Rightarrow \alpha < 90°$
- En ΔBNC: $\gamma < \alpha \Rightarrow \gamma < \alpha < 90°$

$\Rightarrow \gamma < 90°$

- Como γ es mayor entero $\Rightarrow \gamma = 88°$
- En ΔBPC, por ángulo entre bisectrices:

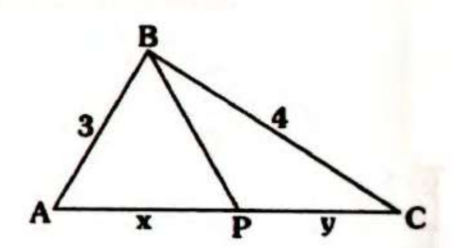
$$m\sphericalangle BNC = \frac{m\sphericalangle BPC}{2}$$

$\Rightarrow m\sphericalangle BPC = 176°$

$\therefore \mathbf{x = 4°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 287



- Piden el mayor valor entero de: xy por existencia:

$x + y < 7$

- Por dato $x + y$ es mayor entero

$\Rightarrow x + y = 6$

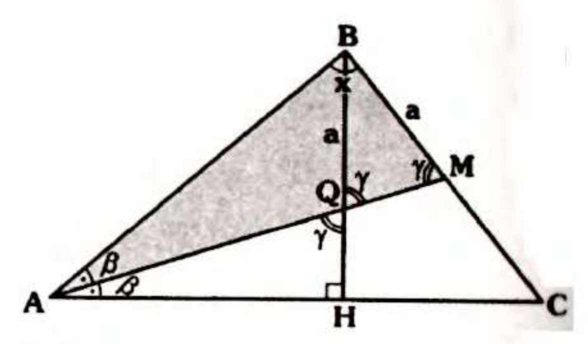
- Como $MG < MA$, para x e y:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \Rightarrow xy \leq 9$$

- El mayor valor de xy, es **9**.

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 288



- Piden: x

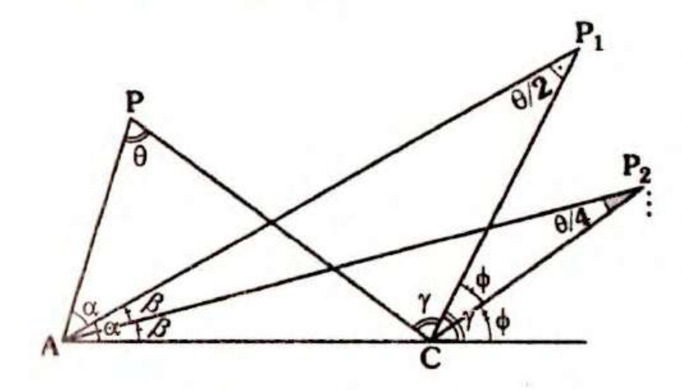
- En ΔABM: $x+\beta+\gamma=180°$
- En ◺AHQ: $\beta+\gamma=90°$

$\Rightarrow x+90°=180°$

$\therefore$ **$x=90°$**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 289



- Por ángulo entre bisectrices se tendrá:

En P_1, el ángulo mide: $\theta/2$

En P_2, el ángulo mide: $\theta/4$

En P_3, el ángulo mide: $\theta/8$

y así sucesivamente.

- Nos piden E:

Donde: $E=\theta+\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\theta}{4}+\dfrac{\theta}{8}+...$

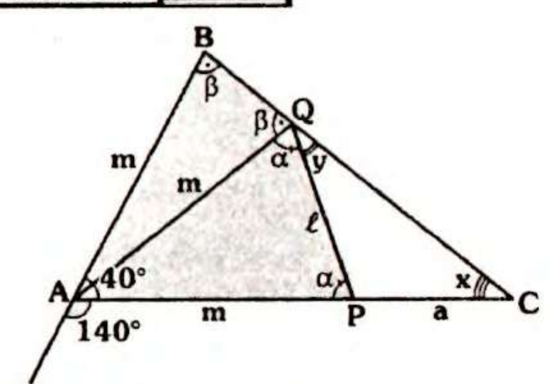
$\Rightarrow E=\theta+\dfrac{1}{2}\underbrace{(\theta+\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\theta}{4}+...)}_{E}$

$\Rightarrow E=\theta+\dfrac{1}{2}E$

$\therefore$ **$E=2\theta$**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 290



- Piden el mayor valor entero de x.
- Dato: $a>\ell$
- En ΔPQC: como $a>\ell \Rightarrow y>x$ ... (I)
- En ⏢ABQP: $\alpha+\beta=140°+y$
- Pero:

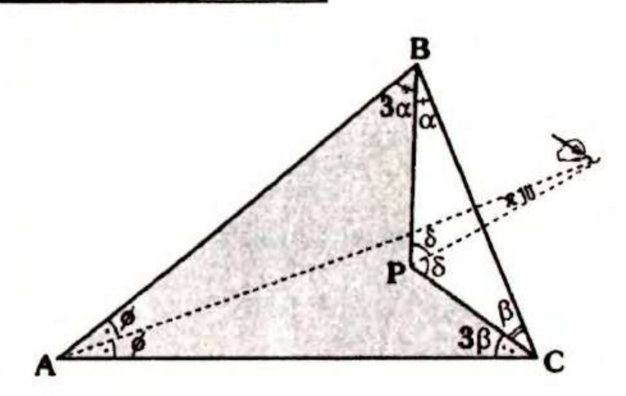
$\alpha+\beta+y=180° \Rightarrow 140°+2y=180°$

$\Rightarrow y=20°$

- En (I): $20°>x$
- Por lo tanto, el mayor valor entero es: **19°**.

Clave

RESOLUCIÓN Nº 291



- Piden: x
- Dato: $m\measuredangle ABC - m\measuredangle BCA=40°$

$\Rightarrow 4\alpha-4\beta=40°$

$\Rightarrow \quad \alpha-\beta=10°$

- En la región sombreada, por teorema 30

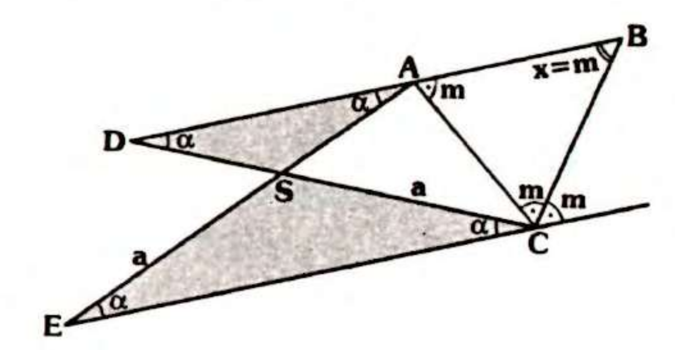
$$x = \frac{3\alpha - 3\beta}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \mathbf{x = 15°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 292



- Piden: x
- Dato: SE=SC y SD=SA

$\Rightarrow \Delta SEC$ y $\Rightarrow \Delta SDA$: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle SEC = m\measuredangle SAD = \alpha$

$\Rightarrow \overline{DA} // \overline{BC}$

- Por ángulos alternos internos:

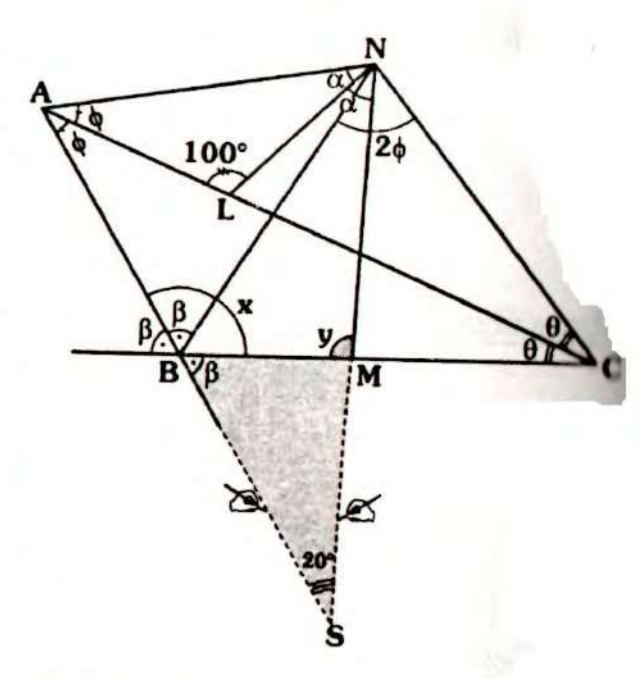
$$x = m$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ es equilátero

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 293



- Piden: x + y
- Dato: $m\measuredangle BNC = 2(m\measuredangle NAC)$
- Por ángulo entre bisectrices, en ΔNBC

$$m\measuredangle BAC = \frac{m\measuredangle BNC}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BAC = \phi$$

- Se prolongan $\overline{AB}$ y $\overline{NM}$, en ΔSNA

$$m\measuredangle ALN = 90° + \frac{m\measuredangle BSM}{2}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle BSM = 20°$$

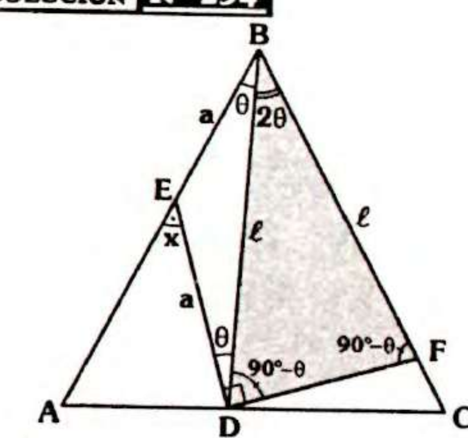
- En ΔBSM:

$$x + y = 180° + 20°$$

$$\therefore \mathbf{x + y = 200°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 294



- Piden: x
- Dato: $EB = ED$ y $DF = BD$

$\Rightarrow \Delta EBD$ y $\Rightarrow \Delta DBF$: isósceles

- En ΔEBD : $x = 2\theta$
- En ΔDBF : $m\sphericalangle BDF = m\sphericalangle DFB = 90° - \theta$

$\Rightarrow m\sphericalangle FBD = 2\theta$

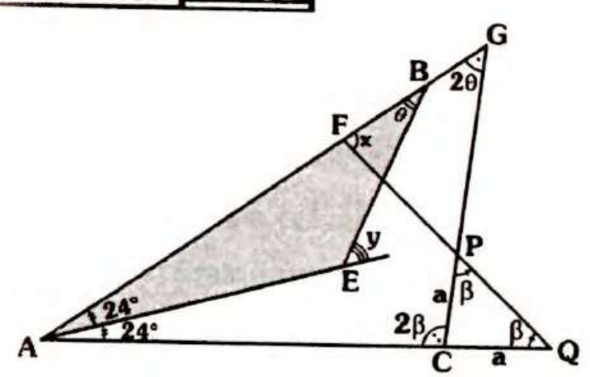
- Como ΔABC es equilátero

$\theta + 2\theta = 60° \Rightarrow \theta = 20°$

$\therefore \mathbf{x = 40°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 295



- Piden: $x + y$
- Dato: $CP = CQ$
- En ΔABE : $y = 24° + \theta$
- En ΔAFQ : $x = 48° + \beta$

$\Rightarrow x + y = 72° + \theta + \beta$ ... (I)

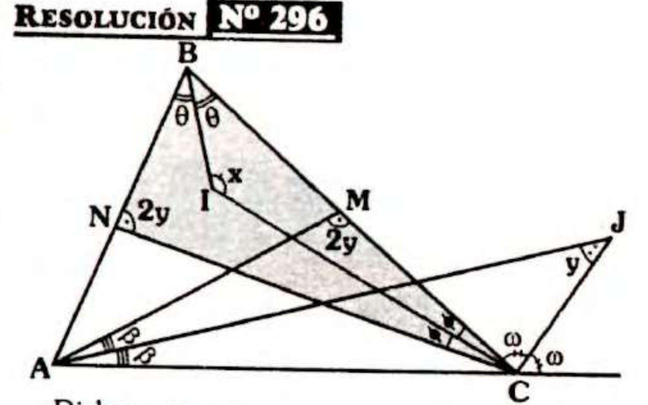
- En ΔAGC : $2\theta + 2\beta + 48° = 180°$

$\Rightarrow \theta + \beta = 66°$

$\therefore \mathbf{x + y = 138°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 296



- Piden: $x - y$
- Dato: $m\sphericalangle BNC = m\sphericalangle AMC$
- En ΔAMC, por ángulo entre bisectrices

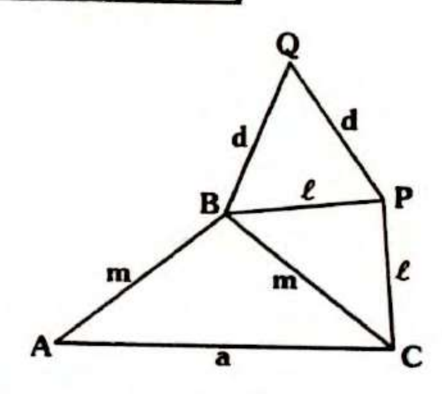
$$m\sphericalangle AJC = \frac{m\sphericalangle AMC}{2} \Rightarrow m\sphericalangle AMC = 2y$$

- Del dato: $m\sphericalangle BNC = 2y$
- En ΔNBC : $x = 90° + \dfrac{(2y)}{2}$

$\therefore \mathbf{x - y = 90°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 297



- Nos piden la relación entre **a** y **d**.

En $\triangle ABC$: $a < 2m$ ... (I)

En $\triangle BPC$: $m < 2\ell \Rightarrow 2m < 4\ell$ ... (II)

En $\triangle BQP$: $\ell < 2d \Rightarrow 4\ell < 8d$ ... (III)

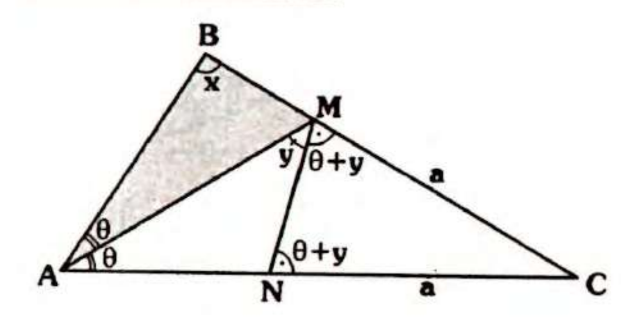
- De (I) y (II) y (III):

$$a < 2m < 4\ell < 8d$$

$$\therefore \mathbf{a < 8d}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 298



- Piden: $x - y$
- Dato: $x + y = 150°$ y $MC = CN$

$$\Rightarrow \triangle MNC \text{ isósceles}$$

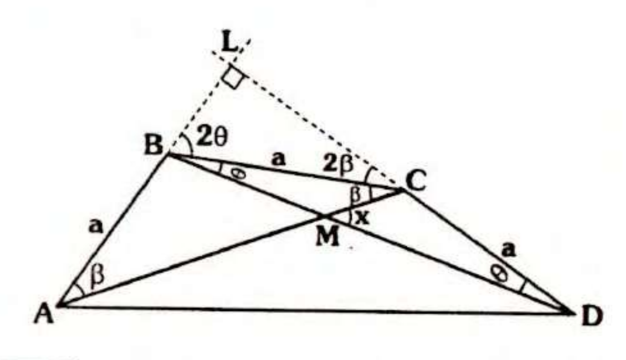
- En $\triangle ABM$: $x + \theta = \theta + 2y \Rightarrow x = 2y$
- Del dato: $2y + y = 150°$

$$y = 50° \wedge x = 100°$$

$$\therefore \mathbf{x - y = 50°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 299



- Piden: x
- Dato: $AB = BC = CD$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ y } \triangle BCD \text{ isósceles}$$

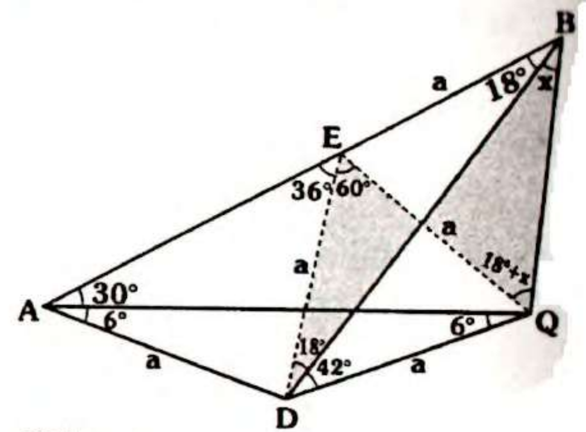
- En $\triangle BMC$: $x = \theta + \beta$
- En ◺BLC: $2\theta + 2\beta = 90°$

$$\Rightarrow \theta + \beta = 45°$$

$$\therefore \mathbf{x = 45°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 300



- Piden: x
- Al completar "ángulos" en $\triangle ADB$, se observa:

$$m\measuredangle DAB = 2(m\measuredangle ABD)$$

- Se traza $\overline{DE}$ tal que $m\measuredangle EDB = 18°$

$$\Rightarrow AD = DE = EB = a$$

$$\Rightarrow \triangle DEQ \text{ es equilátero} \Rightarrow EQ = a$$

$$\Rightarrow \triangle EQB \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle EQB = m\measuredangle EBQ = 18° + x$$

- En la parte sombreada:

$$x + 18° + x = 18° + 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave D

Geometría

ENUNCIADO DE LOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

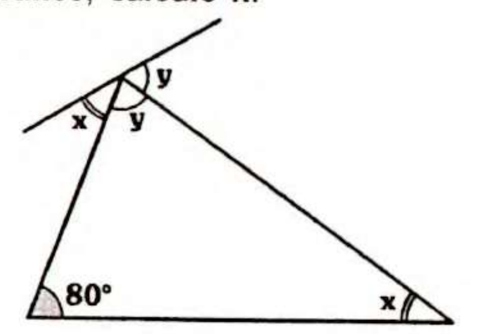
- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

TRIÁNGULOS



PROBLEMA Nº 1

Del gráfico, calcule x.



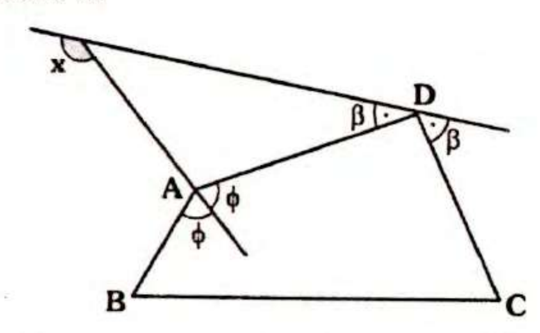
A) 20° B) 30° C) 40°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA Nº 2

En el gráfico :

$$m\measuredangle ABC + m\measuredangle BCD = 140°$$

calcule x.



A) 110° B) 120° C) 140°
D) 160° E) 170°

PROBLEMA Nº 3

Se tiene un triángulo en el cuál dos de sus lados miden 3 y 6. Si el tercer lado tiene por longitud un número impar. Calcule el menor valor del perímetro.

A) 12 B) 13 C) 11
D) 14 E) 16

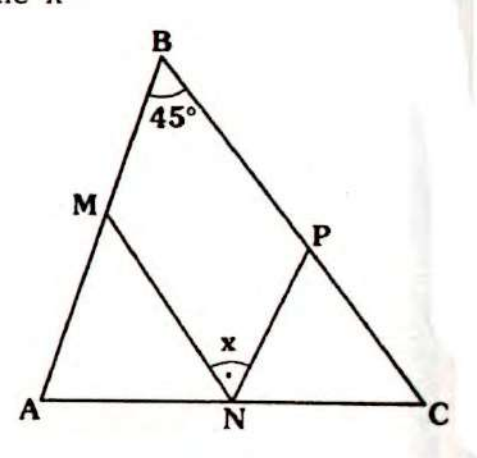
PROBLEMA Nº 4

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD. Si AB=AD, BD=DC y $m\measuredangle ABC = 120°$. Calcule $m\measuredangle ACB$

A) 10° B) 12° C) 20°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA Nº 5

En el gráfico, AM=AN y PC=NC . Calcule x



A) 39° B) 45° C) 67,5°
D) 36° E) 60°

PROBLEMA Nº 6

En el triángulo ABC se cumple:

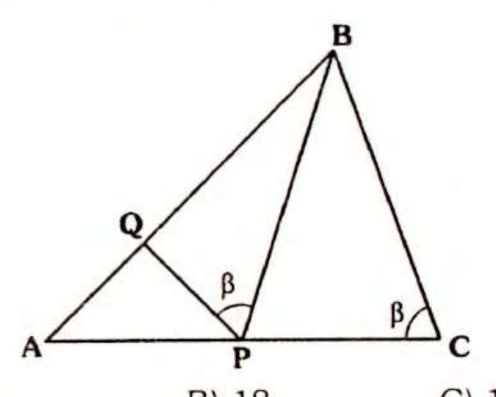
$$AC = 2(AB) \text{ y } m\measuredangle ABC = 3(m\measuredangle BCA)$$

Calcule $m\measuredangle BCA$

A) 30° B) 25° C) 60°
D) 40° E) 20°

PROBLEMA Nº 7

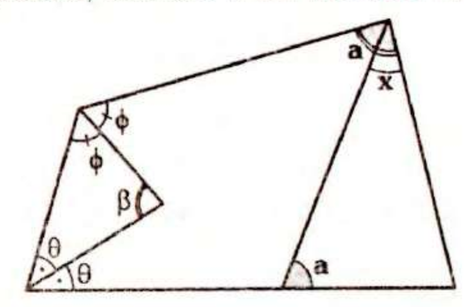
En el gráfico, AQ=QP, PB=BC y AB=16. Calcule AC



A) 8 B) 12 C) 16
D) $8\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 8

Del gráfico, calcule x en función de β.



A) $180° - \beta$ B) β
C) $180° - 2\beta$ D) 2β
E) $90° - \beta$

PROBLEMA Nº 9

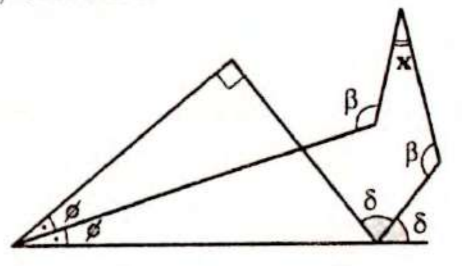
En el triángulo $\overline{ABC}(AC = CB)$, se ubica P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $PB = QC$. Calcule el menor valor entero de m∢BPC.

A) 48° B) 60° C) 46°
D) 59° E) 61°

PROBLEMA Nº 10

Del gráfico, calcule x

A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 22,5°
E) 32,5°



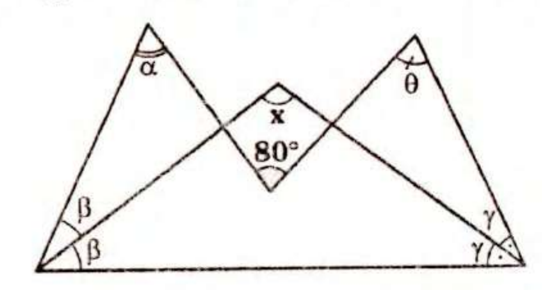
PROBLEMA Nº 11

En el triángulo MPN se traza la altura NQ, tal que m∢MNQ = 20°, m∢NPM = 40° y NP=6. Calcule MP

A) 3 B) 4,5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº 12

En el gráfico, $\alpha + \theta = 140°$. Calcule x

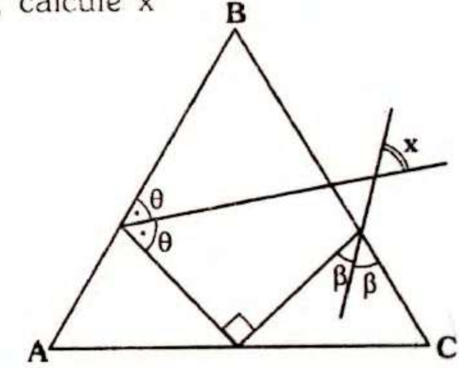


A) 60° B) 100° C) 80°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA Nº 13

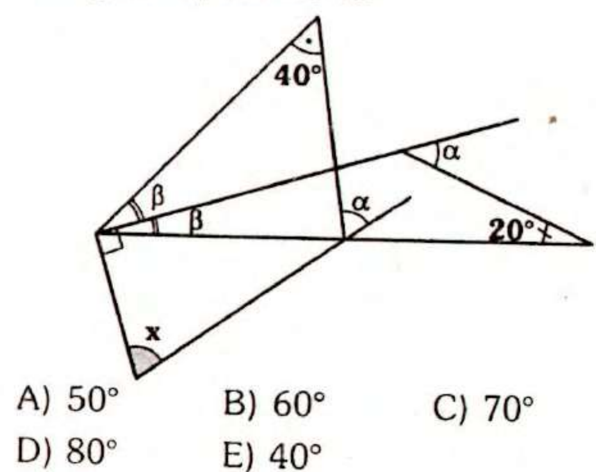
En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, calcule x

A) 30°
B) 80°
C) 60°
D) 45°
E) 75°



PROBLEMA Nº 14

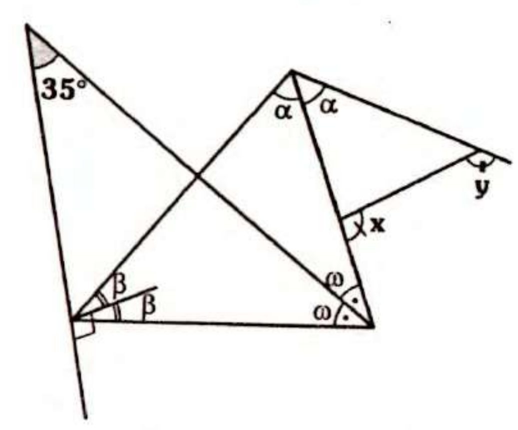
Del gráfico, calcule x.



A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 40°

PROBLEMA Nº 15

Del gráfico, calcule $x+y$.



A) 220° B) 210° C) 250°
D) 200° E) 170°

PROBLEMA Nº 16

En el triángulo ABC se traza la bisectriz exterior BD (D en la prolongación de $\overline{AC}$) y en el triángulo CBD se traza la bisectriz interior CE. Si BE=6; calcule el menor valor entero de CD.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 17

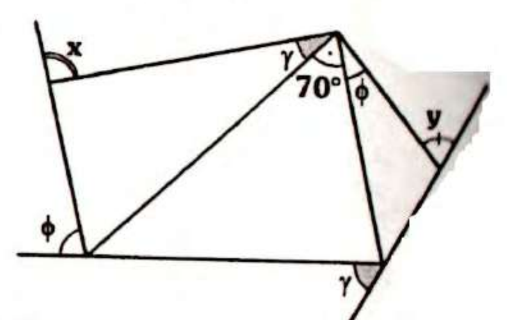
En el triángulo isósceles de base AC, se traza la bisectriz interior CQ. Si AQ=2, calcule el valor entero de CQ.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 18

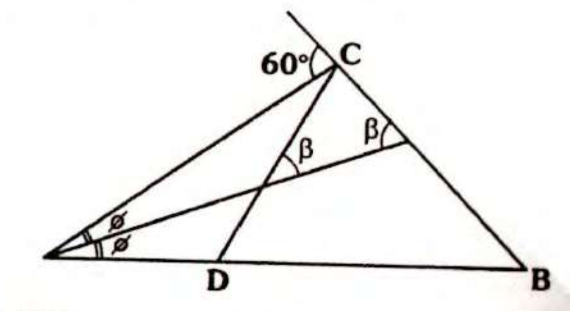
Del gráfico, calcule $x+y$

A) 200°
B) 270°
C) 250°
D) 240°
E) 210°



PROBLEMA Nº 19

Del gráfico, calcule m∢BDC.

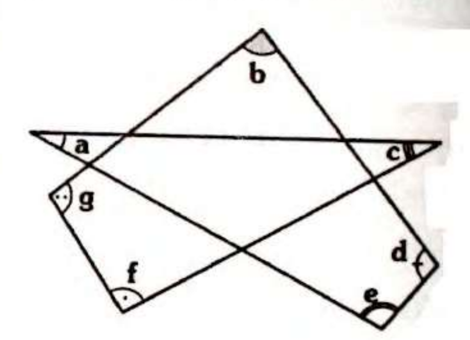


A) 30° B) 60° C) 45°
D) 35° E) 70°

PROBLEMA Nº 20

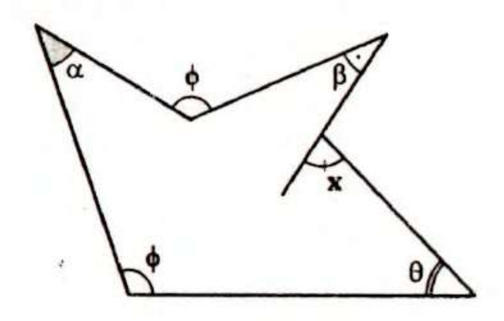
Del gráfico, calcule $a+b+c+d+e+f+g$

A) 180°
B) 360°
C) 540°
D) 720°
E) 900°



PROBLEMA Nº 21

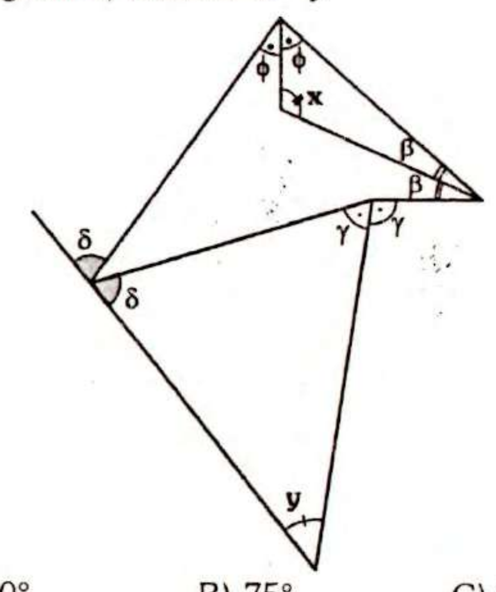
En el gráfico, $\alpha+\beta+\theta=80°$. Calcule x



A) 100° B) 80° C) 160°
D) 140° E) 120°

PROBLEMA Nº 22

Del gráfico, calcule $x-y$

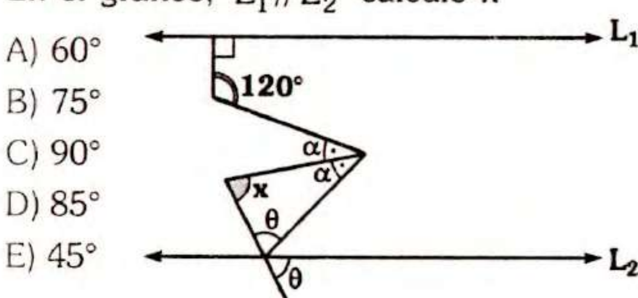


A) 60° B) 75° C) 90°
D) 180° E) 120°

PROBLEMA Nº 23

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}$ calcule x

A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 85°
E) 45°



PROBLEMA Nº 24

En el triángulo ABC, se trazan la altura AH y la bisectriz interior $\overline{BE}$, las cuales se cortan en F. Si $m\measuredangle BAC=64°$ y $m\measuredangle BCA=42°$. Calcule $m\measuredangle AFB$.

A) 107° B) 127° C) 132°
D) 143° E) 150°

PROBLEMA Nº 25

En el triángulo isósceles ABC(AB = BC), se ubican R y Q en las prolongaciones de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, se ubica P en $\overline{BQ}$. Si AP=PQ, BQ = AB + 3 y $m\measuredangle BRQ=90°-\dfrac{m\measuredangle BAP}{2}$

Calcule CR

A) 2 B) 5 C) 6
D) 4 E) 3

PROBLEMA Nº 26

En el triángulo DBE se traza la bisec[illegible] interior DC y en el triángulo DBC se traz[illegible] la ceviana interior BA. Si AB=BC calcu[illegible] le $\dfrac{m\measuredangle ABD}{m\measuredangle CED}$.

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 5/2 E) 3/2

PROBLEMA Nº 27

En el gráfico, AB=6, BE=2 y $\beta+2\alpha=90°$. Calcule el valor entero de AF.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 2

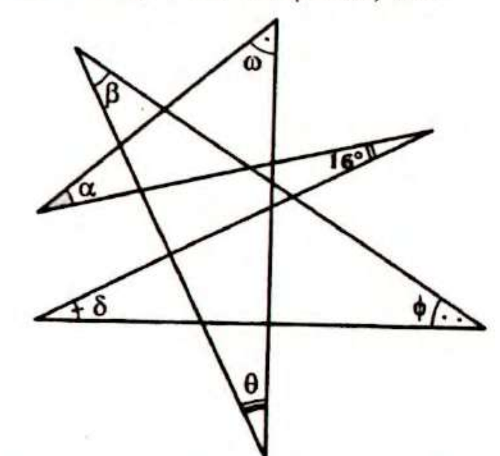
PROBLEMA Nº 28

En el gráfico, $AP=2$ y $BR-RC=3$
Calcule PQ.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 3

PROBLEMA Nº 29

Calcule $\alpha+\beta+\theta+\delta+\phi+\omega$, en:

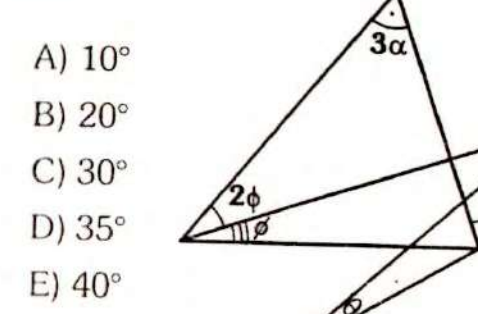


A) 360° B) 180° C) 320°
D) 196° E) 240°

PROBLEMA Nº 30

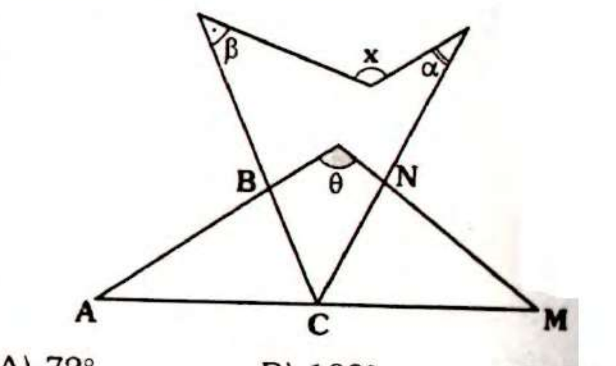
En el gráfico, $\theta+\alpha=20°$.
Calcule x

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 35°
E) 40°



PROBLEMA Nº 31

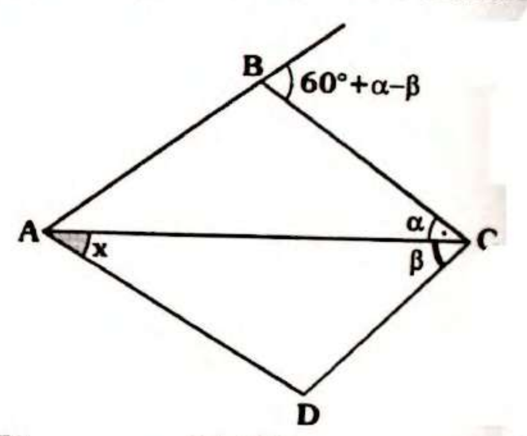
En el gráfico, $AB=AC$; $MC=MN$ y $\theta=2(\alpha+\beta)$. Calcule x



A) 72° B) 100° C) 90°
D) 120° E) 75°

PROBLEMA Nº 32

En el gráfico, $AB=BC=CD$. Calcule x



A) 45° B) 60° C) 30°
D) 36° E) 40°

PROBLEMA Nº 33

En el triángulo ABD se ubica C en la región exterior relativa a $\overline{BD}$, E se encuentra en la prolongación de $\overline{AD}$.

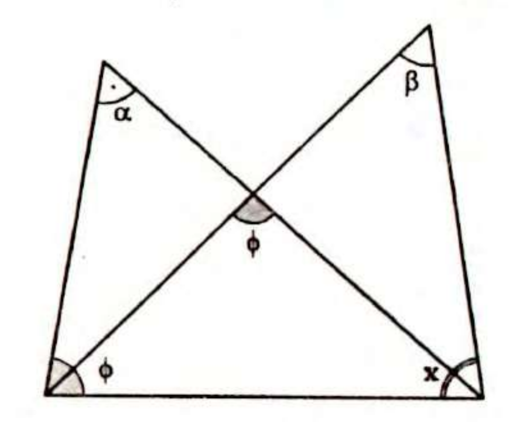
Si $AB=BD=BC$ y $m\sphericalangle ABC=90°$.

Calcule $m\sphericalangle EDC$.

A) 50° B) 45° C) 56°
D) 40° E) 60°

PROBLEMA Nº 34

En el gráfico, $\beta + \alpha = 100°$. Calcule x.



A) 80° B) 100° C) 110°
D) 160° E) 120°

PROBLEMA Nº 35

En el triángulo ABC se traza por B una recta paralela a $\overline{AC}$, la cual es intersectada en P y Q por la bisectrices de los ángulos BAC y ECB en P y Q respectivamente (E en la prolongación de $\overline{AC}$). Si AB=4 y BC=5. Calcule PQ.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 5 E) 4

PROBLEMA Nº 36

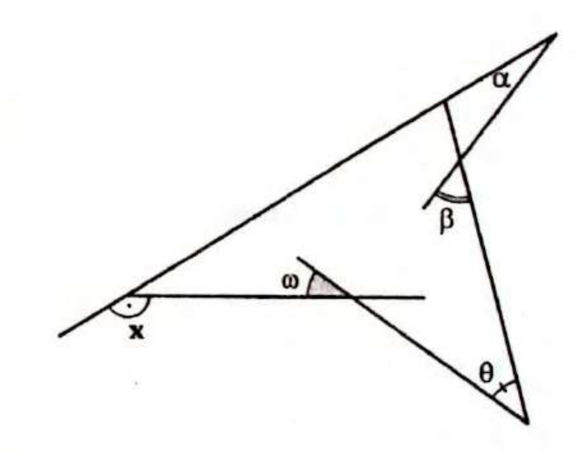
Se tiene la región triangular ABC de perímetro 16, por A se trazan rectas paralelas a las bisectrices interiores (trazadas desde B y C), intersecando a $\overleftrightarrow{BC}$ en M y N. Calcule MN.

A) 12 B) 20 C) 9
D) 16 E) 8

PROBLEMA Nº 37

En el gráfico, $\alpha + \beta + \theta + \omega = 150°$

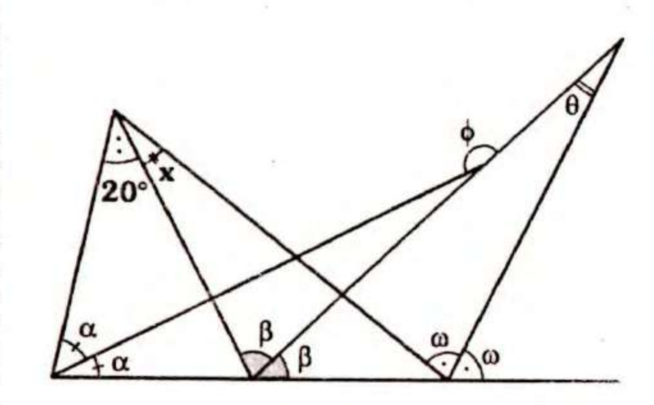
Calcule x.



A) 130° B) 140° C) 150°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA Nº 38

En el gráfico, $\phi + \theta = 180°$, Calcule x.



A) 18° B) 40° C) 10°
D) 20° E) 15°

PROBLEMA Nº 39

En el triángulo ABC, se cumple:

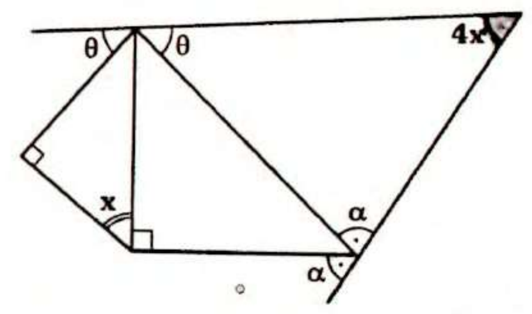
$$m\measuredangle BAC = 40° \text{ y } m\measuredangle ABC = 60°$$

se traza la ceviana interior BD, de modo que $AB = BC + CD$. Calcule $m\measuredangle BDC$.

A) 50° B) 75° C) 80°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 40

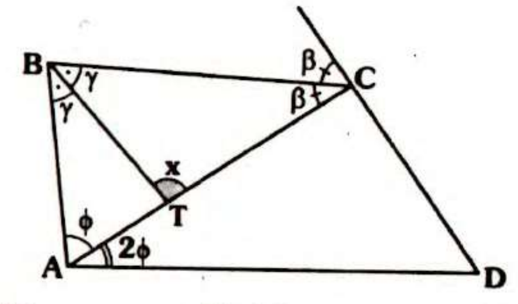
Del gráfico, calcule x.



A) 30° B) 10° C) 20°
D) 50° E) 40°

PROBLEMA Nº 41

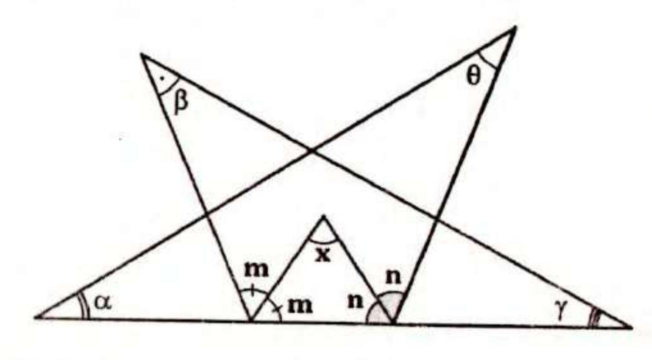
En el gráfico, $2(m\sphericalangle BTA) = 5(m\sphericalangle CDA)$, calcule x.



A) 70° B) 80° C) 100°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA Nº 42

Si $\alpha+\beta+\theta+\gamma=140°$, calcule x.



A) 140° B) 100° C) 80°
D) 70° E) 60°

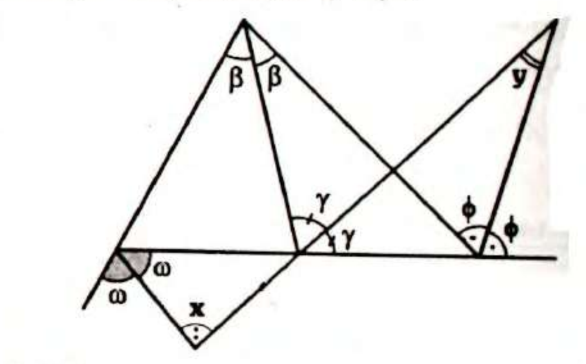
PROBLEMA Nº 43

En el triángulo ABC, se ubican en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican P, Q y R respectivamente. Si $\overline{PQ} // \overline{AC}$, $\overline{AQ} \cap \overline{PR} = \{S\}$, AS=AR y AQ=10. Calcule PQ+AR.

A) 8 B) 7,5 C) 5
D) 10 E) 12,5

PROBLEMA Nº 44

Del gráfico, calcule $x+y$.



A) 45° B) 90° C) 180°
D) 270° E) 135°

PROBLEMA Nº 45

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la altura BH y en el triángulo HBC se traza la ceviana interior BD, tal que $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle HBD)$, AB=8 y BC=15. Calcule CD

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 6

PROBLEMA Nº 46

En un triángulo se cumple que las medidas de los ángulos exteriores están en progresión aritmética. Si el menor ángulo interior mide 30°. Calcule la medida del mayor ángulo interior?

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 70°

PROBLEMA Nº 47

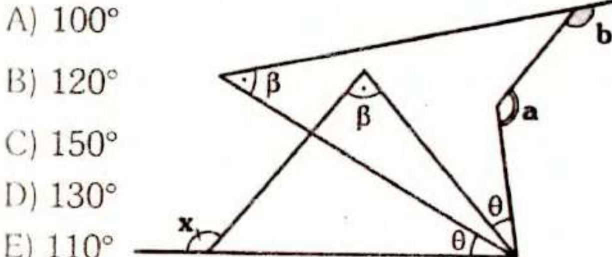
En el triángulo ABC, se ubican los puntos D, F y E en $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. En los triángulos AFD y FEC se trazan las bisectrices interiores $\overline{FN}$ y $\overline{FQ}$ respectivamente. Si $m\sphericalangle ABC = 40°$, AD=DF y FE=EC. Calcule $m\sphericalangle NFQ$.

A) 100° B) 105° C) 110°
D) 120° E) 140°

PROBLEMA Nº 48

En el gráfico, $a + b = 300°$. Calcule x.

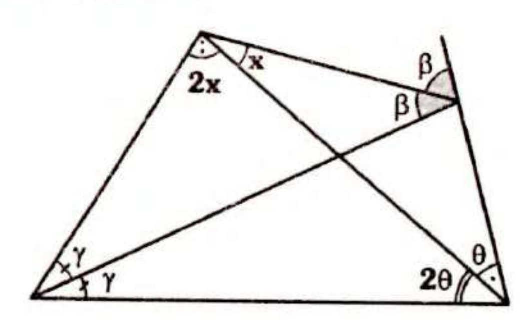
A) 100°
B) 120°
C) 150°
D) 130°
E) 110°



PROBLEMA Nº 49

Del gráfico, calcule x.

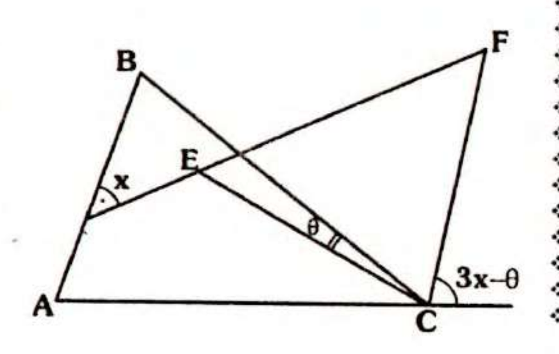
A) 36°
B) 30°
C) 45°
D) 60°
E) 54°



PROBLEMA Nº 50

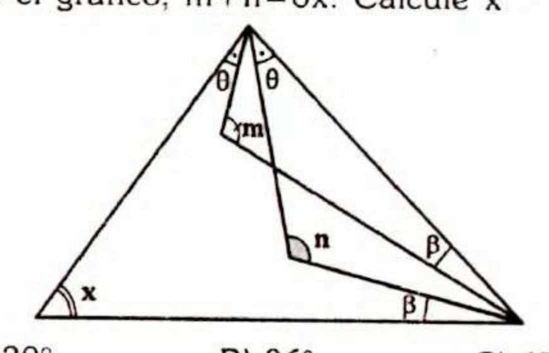
En el gráfico, AC=BC y CE=CF, calcule x

A) 30°
B) 32°
C) 36°
D) 40°
E) 50°



PROBLEMA Nº 51

En el gráfico, m+n=6x. Calcule x



A) 30° B) 36° C) 45°
D) 50° E) 60°

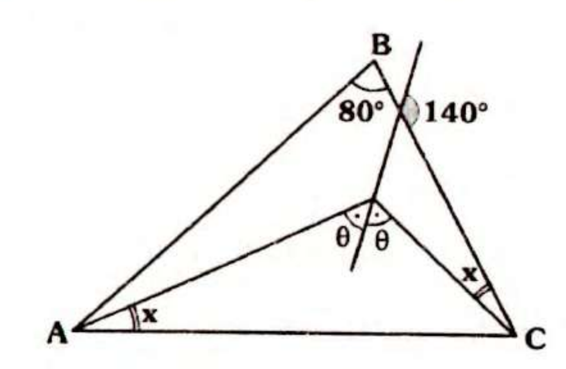
PROBLEMA Nº 52

En el triángulo ABC, se ubican en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ los puntos P y Q respectivamente. Si AB = AP = PQ = QC y $m\sphericalangle BAC = 60°$, calcule $m\sphericalangle QPC$.

A) 10° B) 20° C) 15°
D) 18° E) 22°

PROBLEMA Nº 53

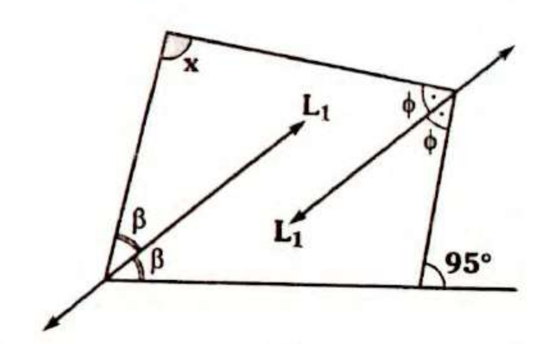
En el gráfico, AB=AC, calcule x.



A) 10° B) 18° C) 15°
D) 12° E) 20°

PROBLEMA Nº 54

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule x.



A) 85° B) 95° C) 105°
D) 110° E) 125°

PROBLEMA Nº 55

En el triángulo ABC, se traza la altura BH y la bisectriz interior BD.

Si $m\sphericalangle BAC - m\sphericalangle BCA = 44°$.

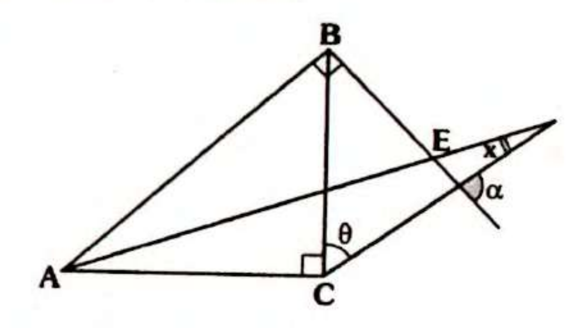
Calcule $m\sphericalangle HBD$.

A) 22° B) 30° C) 56°
D) 38° E) 44°

PROBLEMA Nº 56

En el gráfico calcule x.

Si $m\sphericalangle BAE = m\sphericalangle EAC$



A) $2\alpha+\theta$ B) $\frac{2\alpha-\theta}{2}$ C) $\alpha+2\theta$

D) $\frac{\alpha-\theta}{2}$ E) $\frac{\alpha+\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 57

En el triángulo ABC se ubica P en la región interior, el perímetro de la región ABC es 10 y AC toma su mayor valor entero. Calcule el valor entero de $PA+PC$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 58

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BE y $BD(E \in \overline{AD})$. Si AB=AD, BC=EC y

$$\frac{m\sphericalangle EBD}{3} = \frac{m\sphericalangle DBC}{2} = m\sphericalangle ABE$$

Calcule $m\sphericalangle EBA$

A) 15° B) 20° C) 30°
D) 12° E) 18°

PROBLEMA Nº 59

Se tiene el triángulo escaleno ABC, tal que AC=4 y BC=7. ¿Cuántos valores enteros puede tener AB?

A) 7 B) 5 C) 4
D) 6 E) 8

PROBLEMA Nº 60

En un triángulo ABC se ubica R y S en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, si AB=BR, CB=CS, $m\sphericalangle ABR=\gamma$ y $m\sphericalangle ACS=\alpha$. Indique la alternativa correcta.

A) $\gamma=2\alpha$ B) $\gamma>\alpha$ C) $\alpha=2\gamma$

D) $\gamma<\alpha$ E) $\gamma>\frac{\alpha}{2}$



PROBLEMA Nº 61 SEMINARIO 2007-II

En un triángulo ABC se cumple que $m\measuredangle A = 3m\measuredangle C$; $AB = 3u$ y el ángulo ABC es obtuso. Calcule la longitud entera de $\overline{BC}$.

A) 7 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

PROBLEMA Nº 62 SEMINARIO 2007-II

En un triángulo ABC equilátero se ubica el punto D exterior al triángulo, de manera que $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AC}$. Si el ángulo ADC es obtuso, AD=7 y DC=13, entonces el mayor perímetro entero del triángulo ABC es:

A) 55 B) 56 C) 57
D) 58 E) 59

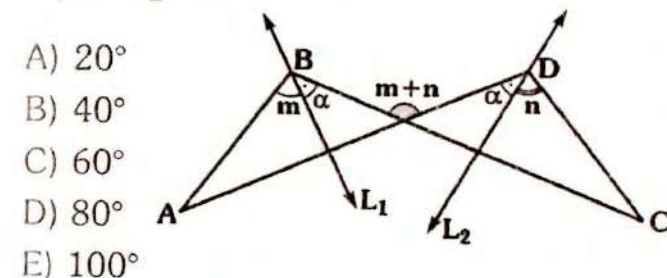
PROBLEMA Nº 63 SEMINARIO 2006-II

En la figura mostrada se verifica que:

$$m\measuredangle BAD + m\measuredangle BCD = 60°.$$

La medida del ángulo agudo que forman $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ es:

A) 20°
B) 40°
C) 60°
D) 80°
E) 100°



PROBLEMA Nº 64 SEMINARIO 2006-II

En el lado BC de un triángulo ABC se ubica el punto D y se une con el vértice A.

Si : $2(m\measuredangle CDA) = m\measuredangle BAC + m\measuredangle ABC$

y $CD = 6u$

entonces la longitud de $\overline{AC}$ (en u) es:

A) 6 B) 4 C) 8
D) 5 E) 7

PROBLEMA Nº 65 SEMINARIO 2006-II

En un triángulo ABC, la bisectriz exterior del ángulo A interseca al rayo BD en el punto D.

Si : $m\measuredangle DBC = 2(m\measuredangle ABD)$,

$m\measuredangle BCA = m\measuredangle DCA$ y $m\measuredangle BDC = 80°$

entonces la $m\measuredangle BDA$ es:

A) 22° B) 23° C) 24°
D) 25° E) 27°

PROBLEMA Nº 66 SEMINARIO 2006-II

En un triángulo isósceles $ABC(AB = BC)$ se traza la bisectriz interior AD $(D \in \overline{BC})$. Si CD=8u, entonces la mayor longitud entera de $\overline{AD}$ (en u es):

A) 14 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

PROBLEMA Nº 67 SEMINARIO 2006-II

En un triángulo ABC sus lados miden:

$AB = 2x - 1$, $BC = 6 - x$ y $AC = 3x - 1$

Si x es un número entero positivo, entonces el triángulo es:

A) Isósceles
B) Acutángulo
C) equilátero
D) Obtusángulo
E) Rectángulo

PROBLEMA Nº 68 **SEMINARIO 2006-II**

Los lados de un triángulo escaleno miden 4μ, 3μ y $\sqrt{x^2-3}$. Si $x>0$, ¿Cuántos valores enteros x existen?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

PROBLEMA Nº 69 **SEMINARIO 2006-II**

En un triángulo rectángulo ABC se traza la altura BH, en el triángulo BHC se traza la ceviana interior HQ y en el triángulo AHB se traza la bisectriz interior BM. Las prolongaciones de $\overline{BM}$ y $\overline{QH}$ se intersecan en P. Si $PM=5cm$, $HC=15cm$, $m\sphericalangle A=72°$ y $m\sphericalangle BPQ=40{,}5°$; entonces la longitud de $\overline{BC}$ (en cm) es:

A) 10
B) 15
C) 20
D) 25
E) 30

PROBLEMA Nº 70 **1ra P.C. 2004-I**

En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura BH. La bisectriz del ángulo ABH interseca a $\overline{AC}$ en el punto M. Si $AC=18u$ y $BC=15u$, entonces la longitud (en u) del segmento AM es:

A) 1,5
B) 2
C) 2,5
D) 4
E) 3

PROBLEMA Nº 71 **1ra P.C 2004-I**

En un triángulo ABC se trazan la bisectriz interior del ángulo A y la bisectriz exterior del ángulo C, las cuales se intersecan en el punto E.

Si: $m\sphericalangle BAC=40°$ y $m\sphericalangle AEC=45°$ entonces la medida del ángulo agudo que forman las rectas BC y AE es:

A) 60°
B) 70°
C) 75°
D) 80°
E) 85°

PROBLEMA Nº 72 **1er P.C. 2005-I**

En un triángulo ABC isósceles, $m\sphericalangle ABC=100°$, se trazan las cevianas $\overline{BP}$ y $\overline{AQ}$ ($P\in\overline{AC}$ y $Q\in\overline{BC}$) tal que:

$$m\sphericalangle PBC=m\sphericalangle BAQ=30°$$

Entonces la $m\sphericalangle BPQ$ es:

A) 30°
B) 40°
C) 50°
D) 60°
E) 70°

PROBLEMA Nº 73 **1ra C.P 2005-II**

Dado un triángulo, donde sus ángulos interiores miden $(x+7)$, $(x-7)$ y $(2y-x)$ ¿cuál es el menor valor entero que puede tomar y?

A) 44°
B) 46°
C) 48°
D) 50°
E) 51°

PROBLEMA Nº 74 **1ra PC 2006-I**

Se tiene el triángulo ABC, las bisectrices interiores trazadas donde A y C se cortan en I. Si $AI=6u$, $CI=2u$ y AC es un número entero. Calcule AC (en u)

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

PROBLEMA Nº 75 **1ra PC 2006-I**

En un triángulo ABC, se trazan la mediana AM y la altura BH. Si $m\sphericalangle ABH=45°$ y $m\sphericalangle BCA=30°$.

Halle $m\measuredangle AMH$.

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 76 **1ra PC 2006-II**

Se tiene el triángulo ABC, $P \in \overline{AC}$, $Q \in \overline{BC}$, $AB = BP = PQ = QC$. Calcule el mayor valor entero que puede tomar la medida del ángulo BCA.

A) 28° B) 29° C) 30°
D) 31° E) 32°

PROBLEMA Nº 77 **1ra PC. 2006-II**

Se tiene el triángulo ABC, $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$ y $R \in \overline{QC}$. Si $m\measuredangle BCP = 30°$ $m\measuredangle BAQ = m\measuredangle CAR = 20°$; $m\measuredangle QAR = 40°$ y $m\measuredangle PCA = 50°$

Calcule $m\measuredangle PQA$.

A) 25° B) 30° C) 35°
D) 40° E) 45°

PROBLEMA Nº 78 **1ra P.C 2007-I**

Se tiene el triángulo ABC, en $\overline{BC}$ se ubica P, en $\overline{PC}$ se ubica Q y en $\overline{AC}$ se ubica R, $m\measuredangle PAQ = m\measuredangle RPQ = 30°$, $m\measuredangle BAP = 20°$, $m\measuredangle QAC = 10°$ y $m\measuredangle APR = 70°$.

Calcule $m\measuredangle AQR$

A) 15° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 35°

PROBLEMA Nº 79 **1er EXÁMEN PARCIAL 2002-I**

En un triángulo escaleno ABC, las bisectrices interiores trazadas desde A y C se intersecan en I. Si AI=3 e IC=4. Halle la longitud de $\overline{AC}$ si se sabe que es un número entero.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 80 **1er EXAMEN PARCIAL 2005-I**

En un triángulo escaleno ABC, donde $AB < BC$, se traza la bisectriz interior BD, entonces podemos afirmar que:

A) $m\measuredangle A - m\measuredangle C = m\measuredangle BDA - m\measuredangle BDC$

B) $m\measuredangle A + m\measuredangle C = m\measuredangle BDC + m\measuredangle BDA$

C) $m\measuredangle A + m\measuredangle C = m\measuredangle BDC - m\measuredangle BDA$

D) $m\measuredangle A - m\measuredangle C = m\measuredangle BDC + m\measuredangle BDA$

E) $m\measuredangle A - m\measuredangle C = m\measuredangle BDC - m\measuredangle BDA$

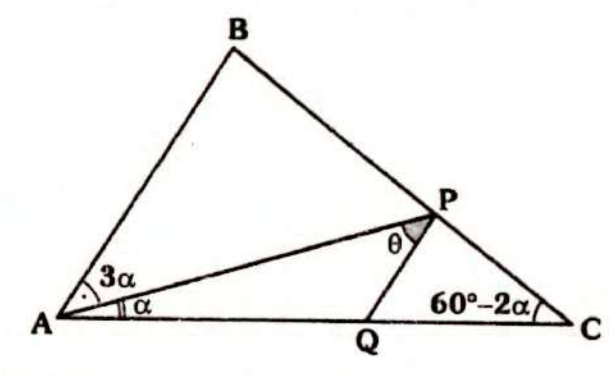
PROBLEMA Nº 81 **Texto CEPRE-UNI 2004**

Dado un triángulo ABC y un punto P exterior tal que $\overline{PC} \cap AB \neq \phi$. Si PA=5u; PB=4u y BC+AC=11u. Calcule el máximo valor entero de la longitud de $\overline{PC}$ (en u).

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 82 **TEXTO CEPRE UNI 2004**

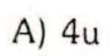
En el gráfico, AB = AQ, calcule θ

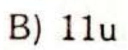


A) 15° B) 30° C) 45°
D) 30° – α E) 15° + α

PROBLEMA Nº 83 TEXTO CEPRE UNI 2004

En la figura $MQ=12u$; $PN=16u$ y $MN=8u$. Halle el mayor valor entero de PQ.

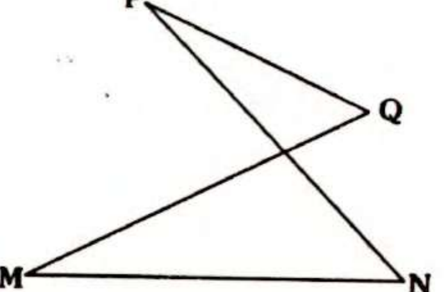

A) 4u


B) 11u

C) 15u

D) 19 u

E) 21u



PROBLEMA Nº 84 TEXTO CEPRE UNI 2004

En un triángulo ABC; AB=3u y BC=10u, siendo AFC un triángulo equilátero. Calcule el mayor valor entero del perímetro del triángulo AFC.

A) 22u B) 24u C) 36u

D) 39u E) 38u

PROBLEMA Nº 85 1er SEMINARIO 99-I

En un triángulo ABC, $m\sphericalangle B=60°$, $P\in\overline{BC}$; $Q\in\overline{AC}$ y $PB=AQ=AB$ y $m\sphericalangle QAB=m\sphericalangle AQP$. Calcule $m\sphericalangle QPC$.

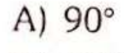
A) 40° B) 50° C) 60°

D) 45° E) 35°

PROBLEMA Nº 86 1er SEMINARIO 99-I

En la figura, calcule :

$$\alpha+\beta+\delta+\varepsilon+\phi+\theta+\omega$$

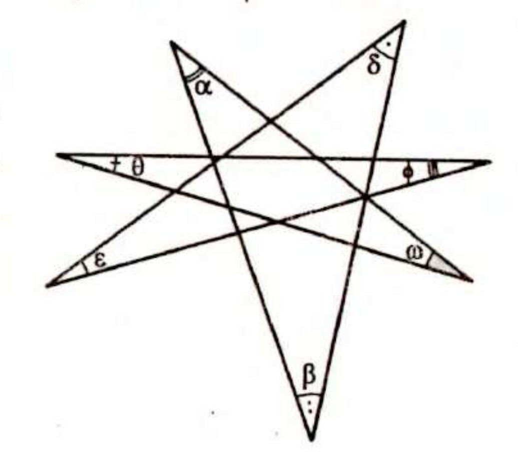

A) 90°

B) 135°

C) 180°

D) 225°

E) 270°



PROBLEMA Nº 87 1er SEMINARIO 99-I

ABC es un triángulo, E es un punto exterior relativo a $\overline{AC}$, tal que AE=8m ;

$$m\sphericalangle AEB=m\sphericalangle BEC\ ;$$
$$m\sphericalangle EBC=m\sphericalangle BCA-m\sphericalangle BEC \quad y$$
$$m\sphericalangle BCA+m\sphericalangle BEC=90°$$

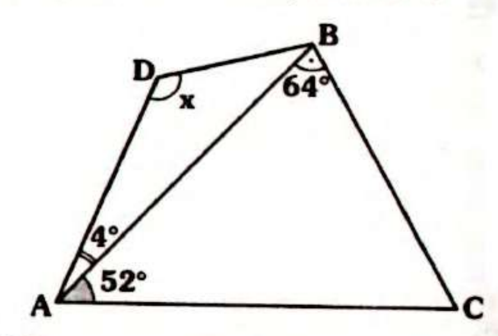
Calcule AB en metros.

A) 6 B) 7 C) 8

D) 9 E) 10

PROBLEMA Nº 88 1er SEMINARIO 99-I

En la figura $AD=BC$, calcule x



A) 100° B) 101° C) 120°

D) 121° E) 150°

PROBLEMA Nº 89 1er SEMINARIO 99-I

Dado el triángulo rectángulo ABC, $P\in\overline{AC}$, $AP<PC$, $AC=2(BP)$ y $m\sphericalangle ABP=\theta$. Calcule $m\sphericalangle C$

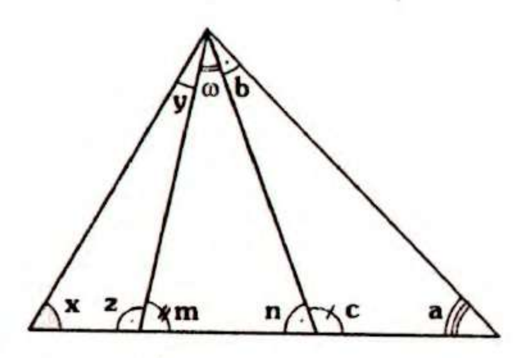
A) $30°+\frac{\theta}{3}$ B) $30°+\frac{\theta}{2}$

C) $30°-\frac{\theta}{2}$ D) $45°+\frac{\theta}{3}$

E) $45°-\frac{\theta}{2}$

PROBLEMA Nº 90 1er SEMINARIO 98-II

En el gráfico ¿cuál de las siguientes relaciones es correcta?



A) $x+z=a+b$

B) $y+z=a+b$

C) $m+x=\omega+n$

D) $x+z+n=\omega+c+m$

E) $x+y+n=a+b+m$

PROBLEMA Nº 91 1er SEMINARIO 98-II

En un triángulo rectángulo ABC ($m\sphericalangle B=90°$) sobre $\overline{AC}$ se toma un punto D ($AD<DC$). Si $AC=10$; $BD=5$ y $m\sphericalangle C=38°$. Calcule $m\sphericalangle ABD$.

A) 10° B) 14° C) 16°
D) 20° E) 24°

PROBLEMA Nº 92 1er SEMINARIO 98-II

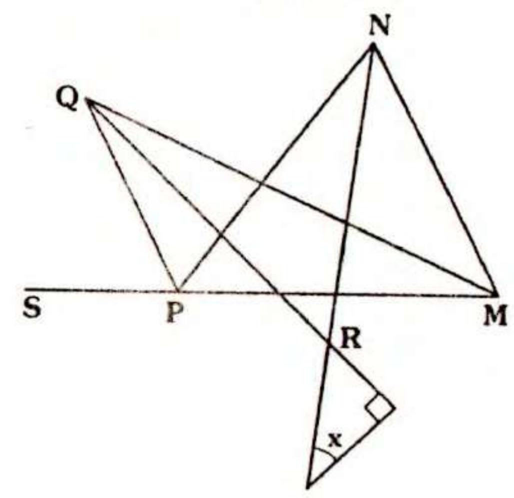
En un triángulo ABC, AB=k y BC=k+5, por B se traza una paralela a $\overline{AC}$ que corta a la bisectriz interior de A en P y a la bisectriz exterior de C en Q. Calcule PQ.

A) 10 B) $\dfrac{5}{2}$ C) 5

D) $\dfrac{k}{2}$ E) $\dfrac{(2+k)}{2}$

PROBLEMA Nº 93 1er SEMINARIO 98-II

En el gráfico, $2(m\sphericalangle NMP)+m\sphericalangle MNP=\phi$. Si $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{NR}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son bisectrices de los ángulos NMP, PQM, MNP y SPN respectivamente. Calcule x.



A) $90°-\dfrac{\phi}{4}$ B) $90°-\dfrac{\phi}{3}$ C) $90°-\dfrac{\phi}{2}$

D) $90°-\phi$ E) $90°-\dfrac{\phi}{5}$

PROBLEMA Nº 94 1er SEMINARIO 98-I

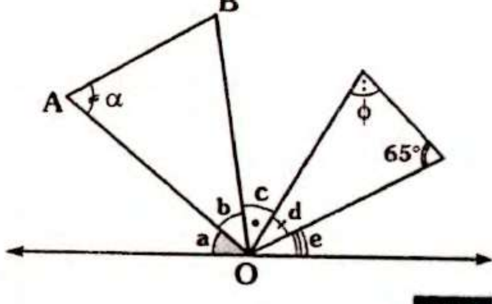
En un triángulo ABC acutángulo, la medida del ángulo interior en A excede en 28° al ángulo interior en B. Calcule la medida del ángulo entre la bisectriz exterior en C y la altura CH.

A) 98° B) 100° C) 102°
D) 104° E) 106°

PROBLEMA Nº 95 1er SEMINARIO 98-I

En el gráfico a, b, c, d y e son números pares consecutivos en orden creciente. Si OA=OB, calcule $\alpha+\phi$.

A) 110°
B) 120°
C) 150°
D) 160°
E) 180°



PROBLEMA Nº 96 1er SEMINARIO 98-I

En un triángulo ABC, obtuso en B se cumple que $m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle C)$ y AB=4u. Calcule el valor entero de BC.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 97 1er SEMINARIO 97-I

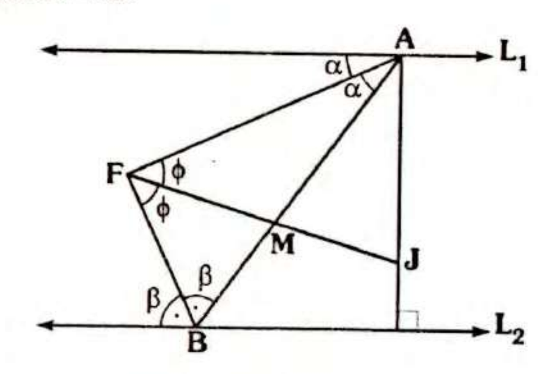
En un triángulo isósceles ABC (AB = BC), se construye exteriormente el triángulo BCD (BD = 4 y CD = 3).

Si BC > AC > CD y el ángulo CDB es obtuso. Si las longitudes de los lados del triángulo ABC son números enteros. Calcule el máximo valor entero del perímetro de ABDC.

A) 16 B) 15 C) 17
D) 18 E) 14

PROBLEMA Nº 98 1er SEMINARIO 97-I

En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, AM=a y BM=b, calcule AJ.



A) $a - b$ B) $\frac{(a+b)}{2}$ C) a

D) $a + \frac{b}{2}$ E) $\frac{2}{3}(a+b)$

PROBLEMA Nº 99 1er SEMINARIO 97-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{BD}$ y $\overline{CF}$ luego se trazan los rayos $\overrightarrow{FP}$ y $\overrightarrow{DP}$, tal que:

$$\frac{m\sphericalangle BFP}{m\sphericalangle PFC} = \frac{3}{2} \quad y \quad \frac{m\sphericalangle CDP}{m\sphericalangle PDB} = \frac{3}{2}$$

Si: $m\sphericalangle BAC = \theta$. Calcule: $m\sphericalangle FPD$

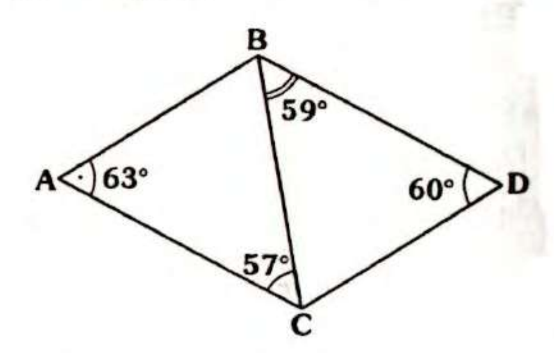
A) $60° - \frac{\theta}{10}$ B) $54° - \frac{\theta}{10}$

C) $36° - \frac{\theta}{10}$ D) $18° - \frac{2}{5}\theta$

E) $90° - \frac{\theta}{10}$

PROBLEMA Nº 100 1er SEMINARIO 97-I

Del gráfico, indique que segmento tiene mayor longitud.

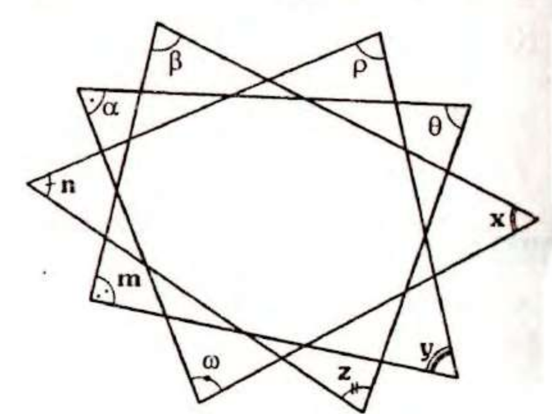


A) $\overline{BC}$ B) $\overline{BD}$ C) $\overline{CD}$
D) $\overline{AB}$ E) $\overline{AC}$

PROBLEMA Nº 101 1er SEMINARIO 97-I

Del gráfico, calcule:

$$\alpha + \beta + \rho + \theta + x + y + z + \omega + m + n$$



A) 180° B) 360° C) 270°
D) 540° E) 720°

PROBLEMA Nº 102 1er SEMINARIO 97-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AF y BD, por D se traza una paralela a $\overline{AB}$ que corta a $\overline{FC}$ en H y a $\overline{AF}$ en E. Si BH=8 y AD=10. Calcule EH.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 103 1er SEMINARIO 2003-II

En un triángulo ABC, se cumple $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$; se traza la bisectriz interior AM tal que $AC = AB + MC$.

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) $\frac{180°}{7}$ B) $\frac{90°}{7}$ C) $\frac{150°}{7}$
D) $\frac{270°}{7}$ E) $\frac{360°}{7}$

PROBLEMA Nº 104 1er SEMINARIO 2003-II

En la recta que contiene al vértice C de un triángulo equilátero ABC se ubican los puntos D y E tal que estos son exteriores a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $m\measuredangle BCE - m\measuredangle DAC = 60°$ y AD=CE. Entonces la medida del ángulo BED, es:

A) 45° B) 90° C) 60°
D) 120° E) 30°

PROBLEMA Nº 105 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo isósceles ABC(AB = BC), la bisectriz exterior del ángulo C y la bisectriz interior del ángulo A, se cortan en E, si AB=10, halle el mayor valor entero que puede tomar AE.

A) 18 B) 19 C) 20
D) 17 E) 16

PROBLEMA Nº 106 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo rectángulo ABC, se traza la altura BH; las bisectrices de los ángulos ABH y HBC intersecan a $\overline{AC}$ en los puntos M y N respectivamente. Si AB=8 y BC=15, calcule MN.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 107 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior desde C y la bisectriz exterior desde A, intersecandose en el punto M, por donde se traza una paralela a $\overline{AC}$ intersecando a la bisectriz interior desde A en el punto N y a los lados AB y BC en los puntos P y Q respectivamente. Si AP=5 y QC=7. Halle MN.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº 108 1er SEMINARIO 2001-II

¿Cuántos triángulos existen de lados enteros y perímetro 26u?

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 10

PROBLEMA Nº 109 1er SEMINARIO 2001-II

En el triángulo ABC(BA = AC), se trazan la altura AD y la ceviana $CM(M \in \overline{AB})$ tal que $m\measuredangle DAC = \alpha$, $m\measuredangle BCM = 2\alpha$. Se ubica N en $\overline{AD}$ tal que CN = BC. Halle $m\measuredangle MCN$.

A) $90° - 3\alpha$ B) $45° - 3\alpha$
C) $60° - 2\alpha$ D) $60° - 3\alpha$
E) $75° - 2\alpha$

PROBLEMA Nº 110 1er SEMINARIO 2001-II

En un triángulo rectángulo ABC, sobre la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica D y por dicho punto se traza una recta secante que interseca a $\overline{AC}$ en E y a $\overline{AB}$ en F. Si AF=FE=ED y BC=CE. Halle m∢ECD

A) 110° B) 108° C) 112°
D) 116° E) 120°

PROBLEMA Nº 111 1er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC(m∢B = 110°), las bisectrices de los ángulos exteriores determinados en A y C se intersecan, con $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$ en P y Q respectivamente. Calcule la medida del ángulo agudo determinado por las bisectrices de los ángulos APB y CQB.

A) 75° B) 55° C) 82°30'
D) 72°30' E) 70°

PROBLEMA Nº 112 1er SEMINARIO 2001-I

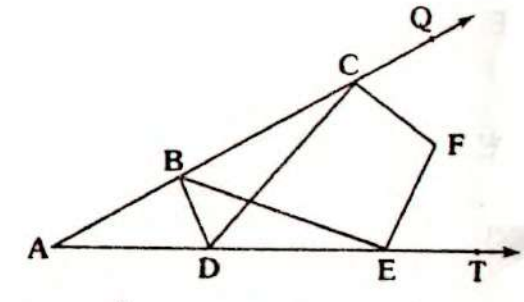
En un triángulo ABC se ubica M punto interior tal que AC=BM; m∢MAC = 48°; m∢MCA = 18° y m∢AMB = 120°.

Calcule m∢MCB.

A) 18° B) 20° C) 24°
D) 30° E) 22°

PROBLEMA Nº 113 1er SEMINARIO 2001-I

En el gráfico $\overline{DC}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ y $\overline{EF}$ son bisectrices de los ángulos BDE, DBC, DCQ y BET respectivamente. Si m∢CAE = θ, calcule m∢CFE.



A) $180° - \frac{\theta}{4}$ B) $90° + \frac{\theta}{4}$
C) $135° - \frac{\theta}{4}$ D) $125° - \frac{\theta}{4}$
E) $150° - \frac{\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 114 1er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y BE, por D se traza una paralela a $\overline{AB}$ que interseca a la prolongación de $\overline{BE}$ en F y a $\overline{AC}$ en G. Si AG = m y BD=n (n > m). Halle FG

A) n − m B) $\frac{m+n}{2}$ C) 2m − n
D) $\frac{2m+n}{3}$ E) $\frac{2n-m}{3}$

PROBLEMA Nº 115 1er SEMINARIO 2001-I

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AD y BE. Si m∢ACB = θ. Calcule la medida del ángulo entre las bisectrices de los ángulos ADC y BEC.

A) $45° + \frac{\theta}{4}$ B) $45° - \frac{\theta}{4}$ C) $60° - \frac{\theta}{4}$
D) $35° - \frac{\theta}{4}$ E) $35° + \frac{\theta}{4}$

PROBLEMA Nº 116 1er SEMINARIO 2001-I

En el interior de un triángulo rectángulo

ABC (recto en B) se ubica Q, tal que:

$\overrightarrow{AQ} \cap \overline{BC} = \{E\}$; $\overrightarrow{CQ} \cap \overline{AB} = \{F\}$

Si $AQ + QC = 10$ y $QE + QF = 4$. ¿Cuántos valores enteros tiene AC?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 117 1er SEMINARIO 2001-I

Dado un triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican P y Q de tal modo que:

$AP = PQ = QC$, $BC = BQ$ y

$m\measuredangle ACB = 2(m\measuredangle BAC)$.

Halle $m\measuredangle PQB$

A) 30° B) 60° C) 36°
D) 72° E) 45°

PROBLEMA Nº 118 1er SEMINARIO 2001-I

En un triánguo ABC, donde:

$m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle ACB)$

Se traza la bisectriz interior BD, si $2(BC) = 5(AD) = 10a$. Calcule AB.

A) 2a B) $\frac{3}{2}a$ C) 3a
D) $\frac{5}{2}a$ E) $\frac{8}{3}a$

PROBLEMA Nº 119 1er SEMINARIO 99-II

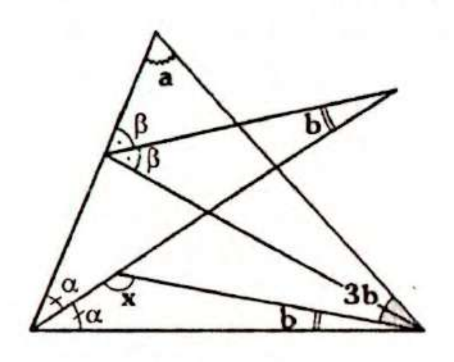
En un triángulo obtusángulo ABC se traza la ceviana interior BD. Si $AB = AD = BC$, calcule el menor valor entero de $m\measuredangle DBC$

A) 40° B) 42° C) 44°
D) 23° E) 45°

PROBLEMA Nº 120 1er SEMINARIO 2005-II

En el gráfico $a + 2b = 100°$, calcule x.

A) 140°
B) 130°
C) 110°
D) 120°
E) 135°



PROBLEMA Nº 121 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo ABD se trazan las cevianas interiores AE y BC, tal que AB=BE=AC; CE=ED y $m\measuredangle BAC = 60°$ .Calcule $m\measuredangle EAC$.

A) 8° B) 12° C) 9°
D) 10° E) 15°

PROBLEMA Nº 122 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo rectángulo ABC isósceles ($m\measuredangle B = 90°$), en su interior se ubica Q, tal que $m\measuredangle BAQ = 2x$; $m\measuredangle ACQ = x$ y $m\measuredangle QBC = 3x$. Calcule x

A) 10° B) 18° C) 12°
D) 15° E) 20°

PROBLEMA Nº 123 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo ABD se ubica Q en la región exterior relativo a $\overline{BD}$, tal que AD=DQ; $m\measuredangle BAQ = 30°$; $m\measuredangle ABD = 18°$ y $m\measuredangle BDQ = 42°$. Calcule $m\measuredangle DBQ$

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 124 1er SEMINARIO 2005-II

El número de rectas distintas que contienen a las alturas, medianas y bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo isósceles no equilátero, es:

A) 9 B) 7 C) 6
D) 5 E) 3

PROBLEMA Nº 125 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores AE, BD y CG intersecandose en I. Si $m\measuredangle AID = 78°$ y $m\measuredangle DIC = 58°$.

Calcule $m\measuredangle BAC - m\measuredangle BCA$

A) 40° B) 38° C) 44°
D) 25° E) 20

PROBLEMA Nº 126 1er SEMINARIO 2005-II

En un triángulo escaleno sus lados miden 4u, 3u y $\sqrt{x^2 - 2}u$. ¿Cuántos valores enteros tiene x?

A) 6 B) 7 C) 12
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 127 1er SEMINARIO 2005-II

¿Cuál es el número de triángulos escalenos, tal que las longitudes de sus lados son números enteros y su perímetro es menor que 13?

A) 3 B) 5 C) 7
D) 4 E) 8

PROBLEMA Nº 128 1er SEMINARIO 2006-I

En un triángulo isósceles ABC $(AB = AC)$, $m\measuredangle A = 80°$, en el interior del triángulo se ubica M, tal que $m\measuredangle MBC = 30°$ y $m\measuredangle MCB = 10°$. Calcule $m\measuredangle AMC$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 70° E) 75°

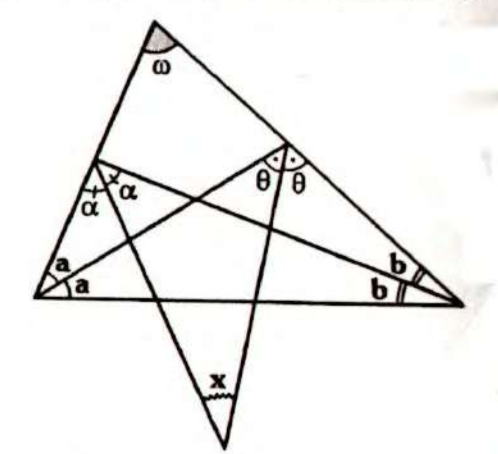
PROBLEMA Nº 129 1er SEMINARIO 2006-I

En el triángulo $ABC(AB = BC)$, $\overline{AD}$ es bisectriz interior y en el triángulo ADC se traza la bisectriz interior $\overline{DM}$ y $\overline{DN}$ e[…] bisectriz exterior con N en $\overline{AC}$. Si AD=5u[…] calcule MN(en u).

A) 10 B) 12 C) 8
D) 9 E) 11

PROBLEMA Nº 130 1er SEMINARIO 2006-I

Del gráfico, calcule x en función de ω.



A) $15° - \frac{\omega}{3}$ B) $45° - \frac{\omega}{5}$ C) $45° - \frac{\omega}{4}$
D) $45° + \frac{\omega}{4}$ E) $45° - \omega$

PROBLEMA Nº 131 1er SEMINARIO 2006-I

Sobre el lado AB de un triángulo ABC(AB = BC) se construye un triángulo equilátero ABE, de modo que los puntos E y C se encuentran en el mismo semiplano con respecto a $\overline{AB}$. Si $m\measuredangle ABC = 20°$ entonces, $m\measuredangle AEC$ es:

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 132 1er SEMINARIO 2006-I

En un triánguo ABC, se cumple:

$$m\measuredangle BAC = 3(m\measuredangle BCA) \text{ y } BC=15$$

Halle el menor valor entero de AB.

A) 9 B) 5 C) 8
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 133 1er SEMINARIO 2006-I

En un triángulo PQR, se trazan las bisectrices interiores QE y RF, se ubica S exterior y relativo a $\overline{QR}$ tal que:

$$m\measuredangle QFS = 3(m\measuredangle SFR) \quad ;$$
$$m\measuredangle RES = 3(m\measuredangle QES) \quad y$$
$$m\measuredangle QPR + m\measuredangle FSE = 180°$$

Calcule $m\measuredangle QPR$

A) 100° B) 110° C) 90°
D) 80° E) 60°

PROBLEMA Nº 134 1er SEMINARIO 2006-I

En un triángulo ABC, AB=3; AC=11 y $m\measuredangle ABC > 90°$. Halle BC si es el mayor número entero posible.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

PROBLEMA Nº 135 1er SEMINARIO 2006-I

En el triángulo ABC(AB = BC), $D \in \overline{AB}$ y $\overline{DE}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ (E en $\overline{AC}$). La prolongación de $\overline{DE}$ interseca al rayo CX, que forma con $\overrightarrow{CA}$ un ángulo de igual medida que $\measuredangle BCA$, en el punto F. Si AD=a y CF=b. Calcule BD

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{2b-a}{2}$ C) $\frac{2a-b}{2}$
D) $\frac{b-a}{2}$ E) $b-2a$

PROBLEMA Nº 136 1er SEMINARIO 2006-I

En el interior de un triángulo ABC se ubica M tal que AB=AM=MC $m\measuredangle BCM = 3\alpha$; $m\measuredangle CAM = 2\alpha$ $m\measuredangle ABC = 13\alpha$. Calcule α.

A) 5° B) 6° C) 10°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 137 1er SEMINARIO 2006-I

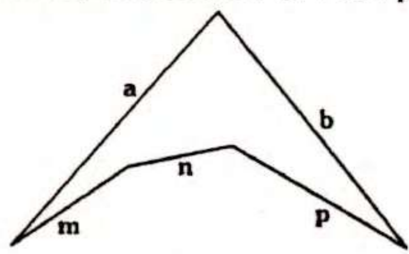
Demostrar que en un triángulo, la medida del ángulo entre una altura con la bisectriz interior trazadas desde el mismo vértice es igual a la semidiferencia de medidas de los otros dos ángulos interiores del triángulo.

PROBLEMA Nº 138 1er SEMINARIO 2007-

Demostrar que en todo triángulo rectángulo, la hipotenusa siempre es mayor que cualquier cateto.

PROBLEMA Nº 139 1er SEMINARIO 2007-II

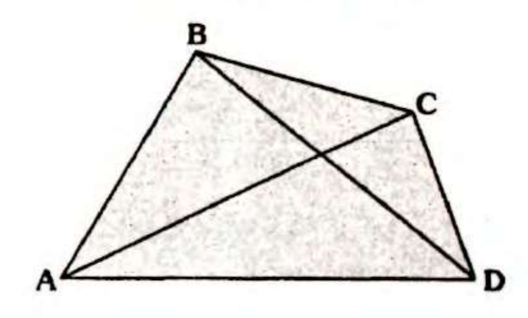
En el gráfico, demostrar: $m + n + p < a + b$



PROBLEMA Nº 140

En el gráfico "p" es el semiperímetro de la región ABCD, demostrar :

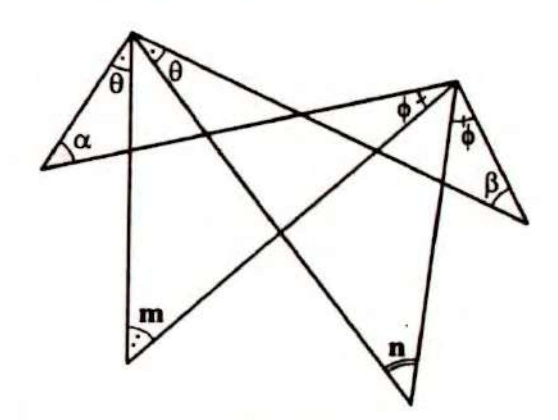
$$p < AC + BD < 2p$$





PROBLEMA Nº 141

En el gráfico, $m+n=120°$. calcule $\alpha+\beta$



A) 60° B) 100° C) 120°
D) 150° E) 90°

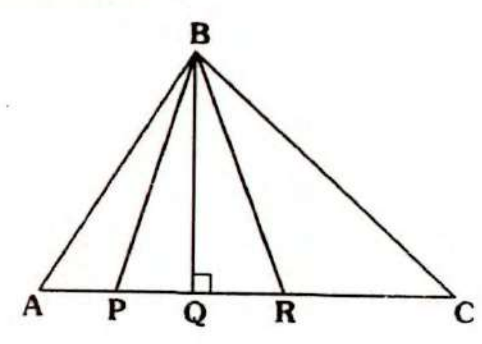
PROBLEMA Nº 142

En el gráfico, AP=3, PR=10, PC=12,

$m\measuredangle BAC=2(m\measuredangle QBR)$ y

$m\measuredangle ACB=2(m\measuredangle PBQ)$.

Calcule AB+BC

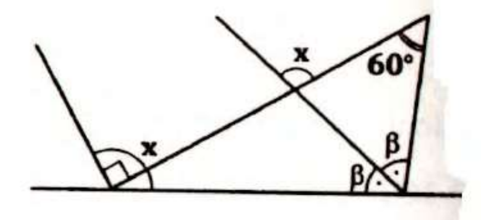


A) 20 B) 25 C) 55
D) 32 E) 30

PROBLEMA Nº 143

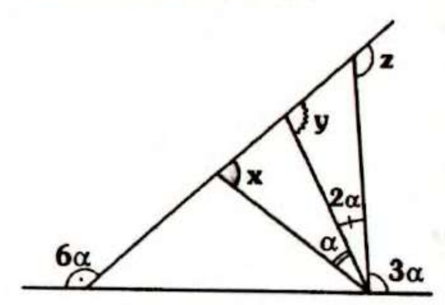
Del gráfico, calcule x.

A) 150°
B) 120°
C) 135°
D) 110°
E) 140°



PROBLEMA Nº 144

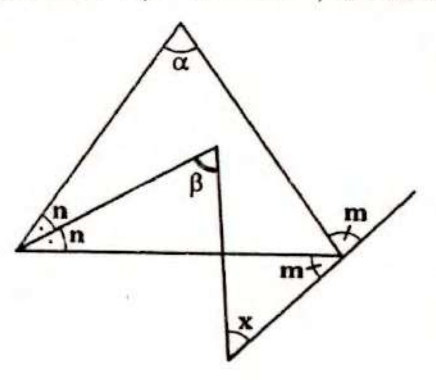
En el gráfico, $x+y+z>270°$, calcule el mayor valor entero de α.



A) 21° B) 24° C) 29°
D) 27° E) 25°

PROBLEMA Nº 145

En el gráfico, $2\beta-\alpha=70°$, calcule x.



A) 35° B) 70° C) 55°
D) 25° E) 45°

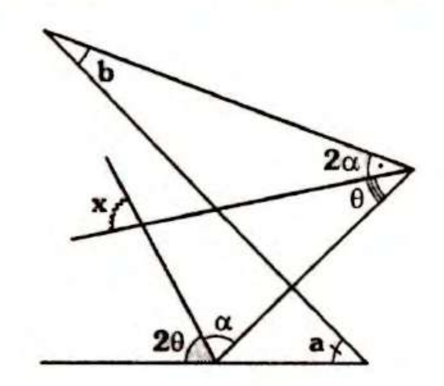
PROBLEMA Nº 146

En la región interior de un triángulo ABC, se ubica P, tal que PB=4 y PC=7. Calcule el menor valor entero del perímetro de la región ABC.

A) 10 B) 11 C) 15
D) 17 E) 18

PROBLEMA Nº 147

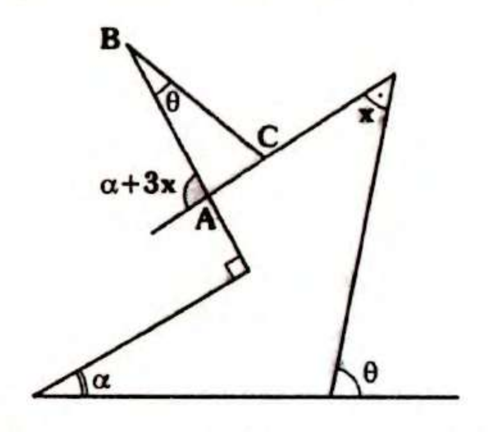
En el gráfico, $a-b=60°$. Calcule x.



A) 50° B) 120° C) 80°
D) 100° E) 130°

PROBLEMA Nº 148

En el gráfico, AB=BC. Calcule x.



A) 50° B) 45° C) 40°
D) 35° E) 30°

PROBLEMA Nº 149

En un triángulo las distancias de un punto interior a sus vértices son 3, 4 y 8. Calcule el mayor valor entero del perímetro.

A) 23 B) 24 C) 25
D) 29 E) 20

PROBLEMA Nº 150

En el triángulo $ABC(AB=BC)$, se ubica G en $\overline{AB}$ y F en $\overline{BC}$ tal que el triángulo FGC es equilátero. Si $m\measuredangle ACG=\alpha$.

Calcule $m\measuredangle FGB$.

A) α B) $60°-\alpha$ C) $60°+\alpha$
D) 2α E) $90°-\alpha$

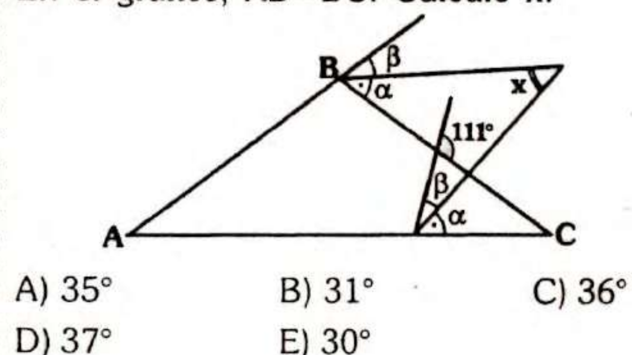
PROBLEMA Nº 151

En los lados AC y BC del triángulo ABC se ubican los puntos E y F respectivamente. De modo que AB=AF, EB=BC y $m\measuredangle ABE=m\measuredangle EBC=4(m\measuredangle FAC)$. Calcule $m\measuredangle BAF$

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 15° E) 16°

PROBLEMA Nº 152

En el gráfico, AB=BC. Calcule x.



A) 35° B) 31° C) 36°
D) 37° E) 30°

PROBLEMA Nº 153

En el triángulo ABC en las prolongacio-

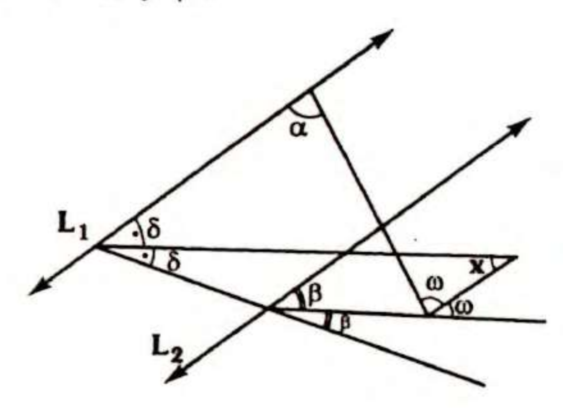
nes de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P, Q y R respectivamente, en $\overline{PQ}$ se ubica M tal que $\overline{MR} \perp \overline{AC}$, $PB = BQ$ y $m\measuredangle PAR - m\measuredangle ACB = 32°$.

Calcule $m\measuredangle RMQ$

A) 32° B) 48° C) 24°
D) 16° E) 29°

PROBLEMA Nº 154

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcule x, en función de α y β.



A) $\alpha + \beta$ B) $\dfrac{\alpha - \beta}{2}$ C) $2\alpha - \beta$
D) $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ E) $2\alpha + \beta$

PROBLEMA Nº 155

En la región exterior relativa a $\overline{BC}$ del triángulo equilátero ABC se ubica el punto M, tal que:

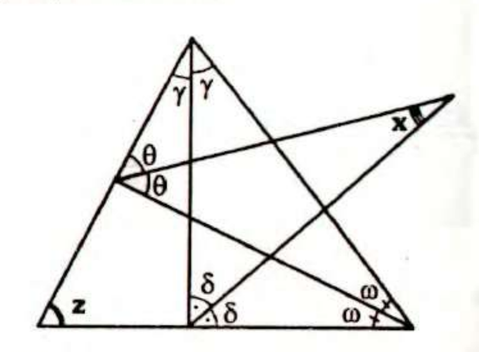
$$\overline{AM} \cap \overline{BC} = \{N\} \quad y \quad MN = MC = AB$$

Calcule $m\measuredangle CBM$.

A) 40° B) 30° C) 50°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA Nº 156

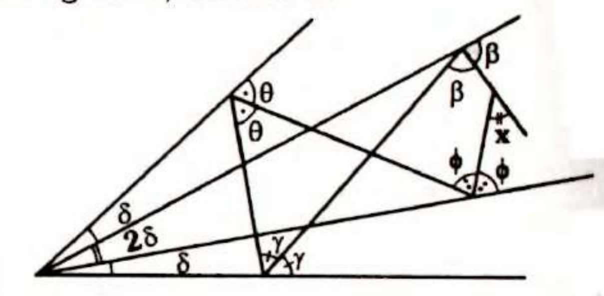
En el gráfico, el triángulo ABC es acutángulo, si z toma su mayor valor entero par, calcule x.



A) 44° B) 46° C) 23°
D) 78° E) 88°

PROBLEMA Nº 157

Del gráfico, calcule x.



A) 30° B) 45° C) 36°
D) 60° E) 72°

PROBLEMA Nº 158

Se tiene un triángulo ABD, se ubica C en la región exterior relativa a $\overline{BD}$, tal que $\overline{AD} // \overline{BC}$, AC=20 y BD=10. Calcule la diferencia del máximo y mínimo valor entero de AD+BC.

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

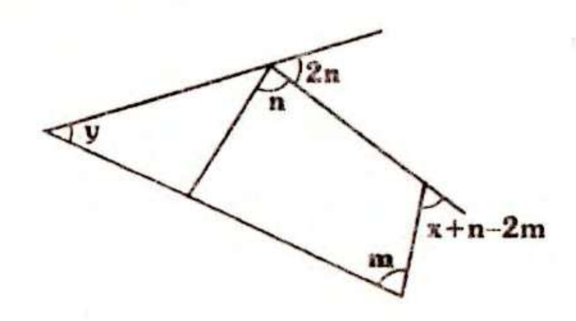
PROBLEMA Nº 159

Indique el número de triángulos escalenos cuyo perímetro sea 13 y las longitudes de sus lados sean enteras.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA Nº 160

En el gráfico, $m-n=10°$. Calcule $x-y$.



A) 40° B) 51° C) 30°
D) 91° E) 59°

PROBLEMA Nº 161

En el triángulo ABC el punto I es la intersección de las bisectrices interiores desde A y B. Por I se traza una recta perpendicular a $\overline{CI}$, la cual interseca a la bisectriz exterior trazada desde A en el punto M. La bisectriz exterior del ángulo de vértice M del triángulo MIA interseca a la prolongación de $\overline{IC}$ en T, tal que:

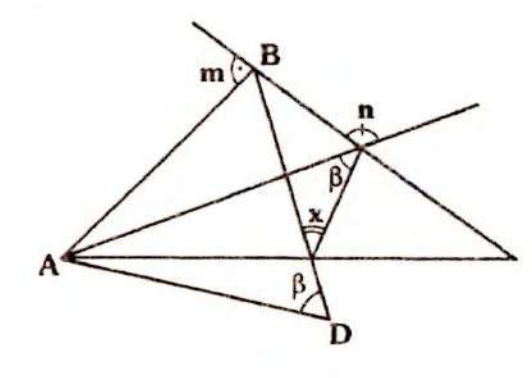
$$m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle ITM)$$

Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 60° B) 40° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 162

En el gráfico, AB=AD y $m+n=220°$. Calcule x.



A) 30° B) 40° C) 50°
D) 35° E) 70°

PROBLEMA Nº 163

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, luego en el triángulo BDC se traza la ceviana interior DE tal que:

$$AB=BD=BE \quad y$$

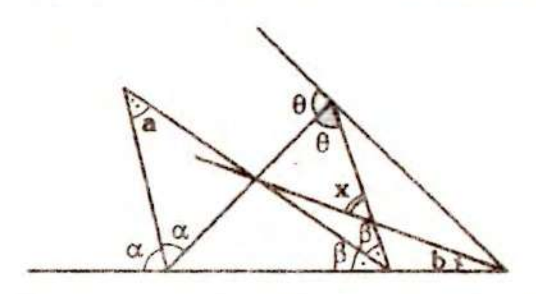
$$m\measuredangle BAD = 3(m\measuredangle AED)$$

Calcule $m\measuredangle AED$

A) 16° B) 15° C) 18°
D) 22°30' E) 26°30'

PROBLEMA Nº 164

En el gráfico, $4a-b=160°$. Calcule x.



A) 10° B) 18° C) 20°
D) 30° E) 40°

PROBLEMA Nº 165

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AM en cuya prolongación se ubica N, si $m\measuredangle ABC = 40°$; $m\measuredangle ANC = 35°$ y $m\measuredangle BAC = m\measuredangle AMC$.

Calcule $m\measuredangle ACN$

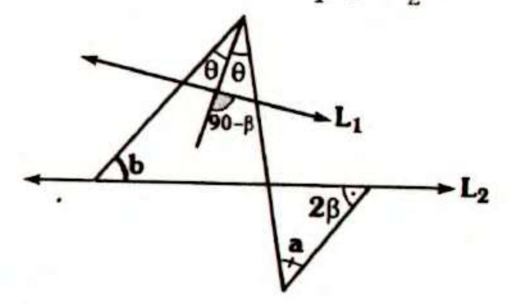
A) 105° B) 106° C) 108°
D) 100° E) 95°

PROBLEMA Nº 166

En el gráfico, CP = CQ . Calcule x.

PROBLEMA Nº 181

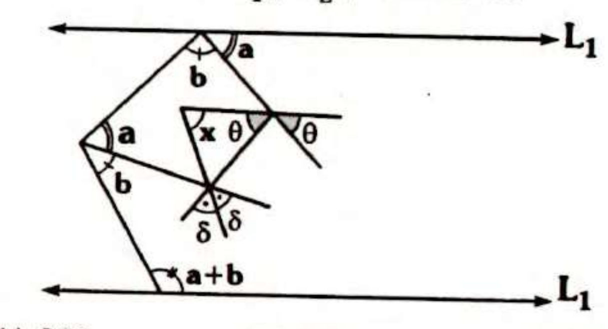
En el gráfico, $a+b=80°$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.



A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 55°

PROBLEMA Nº 182

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule x.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 67,5° E) 52,5°

PROBLEMA Nº 183

En un triángulo APQ se traza una recta que corta a $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$ y a la prolongación de $\overline{AQ}$ en B, M y C respectivamente. Si $m\sphericalangle PAQ=30°$ y $AB=MC=QC$. Calcule la diferencia del mayor y menor valor entero de $m\sphericalangle APQ$.

A) 11° B) 12° C) 13°
D) 14° E) 15°

PROBLEMA Nº 184

Los lados de un triángulo tienen por longitudes $2a-1$, $6-a$ y $3a-1$. Si $a \in \mathbb{Z}^+$. Calcule la medida del mayor ángulo interior.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 120° E) 127°

PROBLEMA Nº 185

En un triángulo ABC se ubica P en la región exterior relativa a $\overline{BC}$, tal que el perímetro de la región BPC es 12. Calcule el mayor valor entero de AC, si AB y BC son enteros y $m\sphericalangle BCA < m\sphericalangle BAC$.

A) 11 B) 9 C) 8
D) 6 E) 7

PROBLEMA Nº 186

El perímetro de una región triangular es 24. Si el triángulo es rectángulo, calcule el menor valor entero de la longitud de la hipotenusa.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

PROBLEMA Nº 187

Se tiene un triángulo obtusángulo, si los lados menores miden 10 y 2. ¿Cuántos valores enteros toma el mayor lado?

A) 1 B) 0 C) 2
D) 3 E) 4

PROBLEMA Nº 188

En un triángulo ABC, en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican M, N y L respectivamente. Luego se ubica P, Q y R en $\overline{MN}$, $\overline{NL}$ y $\overline{ML}$ respectivamente si $PQ=5$, $QR=6$ y $PR=7$, calcule el menor valor entero del perímetro de la región ABC.

A) 14 B) 15 C) 18
D) 19 E) 20

PROBLEMA Nº 189

En uun triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica P, tal que $AB = BP$ y $m\sphericalangle BAP = 40°$. En la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica M. Calcule $m\sphericalangle PCM$

A) 30° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

PROBLEMA Nº 190

En la región exterior relativa a $\overline{AB}$ del triángulo ABC se ubica P, tal que $PB = BC$,

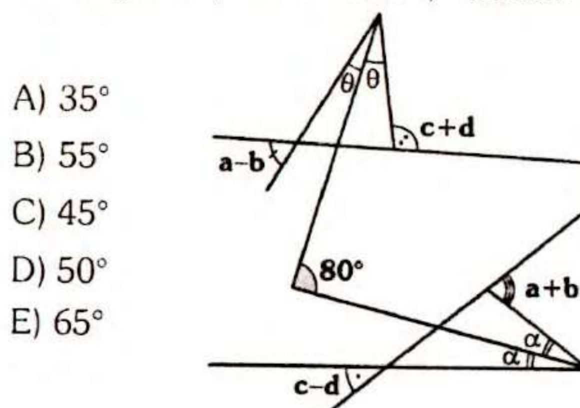
$$m\sphericalangle ACB = 2(m\sphericalangle BAC) \quad y$$
$$m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle PBA = 60°$$

Calcule $m\sphericalangle PAB$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 60°

PROBLEMA Nº 191

En el gráfico, $a + c = 135°$, calcule x.



A) 35°
B) 55°
C) 45°
D) 50°
E) 65°

PROBLEMA Nº 192

En un triángulo ABC se ubica E en la prolongación de $\overline{BC}$ y D en $\overline{AE}$ tal que $AC = CE$.

Si $m\sphericalangle ACB = 3(m\sphericalangle DCE)$ y $ED = 4$.

Calcule el mayor valor entero de CD.

A) 8 B) 9 C) 3
D) 5 E) 7

PROBLEMA Nº 193

En el triángulo ABC de base AC, se traza la recta secante $\overleftrightarrow{MN}$ que interseca a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a la prolongación de $\overline{AC}$ en P, Q y R respectivamente (P, Q y R en $\overleftrightarrow{MN}$). Si $m\sphericalangle BPM = b$ y $m\sphericalangle CQR = a$.

Calcule $m\sphericalangle QRC$.

A) $90° - (a + b)$ B) $\dfrac{a+b}{2}$

C) $90° - \dfrac{(a+b)}{2}$ D) $\dfrac{b-a}{2}$

E) $45° - \dfrac{(a+b)}{4}$

PROBLEMA Nº 194

En el triángulo ABC se trazan la cevianas interiores AM y CN de modo:

$$m\sphericalangle BNC = m\sphericalangle AMC$$

y la medida del menor ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos ANC y AMC es igual a la medida del ángulo ABC. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 45° B) 60° C) 90°
D) 30° E) 72°

PROBLEMA Nº 195

En el triángulo acutángulo ABC se trazan las bisectrices interiores BF y CE. Si $m\sphericalangle BAC$ toma su mayor valor entero par, calcule la medida del ángulo que

determinan las bisectrices de los ángulos BFC y CEB.

A) 23° B) 19° C) 21°
D) 30° E) 29°

PROBLEMA Nº 196

Dado el triángulo ABC, en la prolongación de la bisectriz interior AM se ubica P tal que :

$$m\measuredangle ABC + 2(m\measuredangle APC) = 40°$$

Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AP}$ y la bisectriz del ángulo determinado por CP y la bisectriz interior CQ del triángulo ABC.

A) 80° B) 75° C) 55°
D) 90° E) 45°

PROBLEMA Nº 197

En el triángulo ABC, las bisectrices interiores AM y CN se intersecan en I, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica Q, de modo que :

$$m\measuredangle ABQ + m\measuredangle ABC + m\measuredangle BQC = 180°$$

los ángulos BAC y BAI son suplementarios lo mismo que QCA y QCI. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 36° B) 45° C) 72°
D) 30° E) 60°

PROBLEMA Nº 198

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM, BN y CL de modo que las dos primeras se cortan en S y la tercera corta a $\overline{SB}$ y $\overline{SM}$ en R y Q respectivamente de modo que $RQ = QS$.

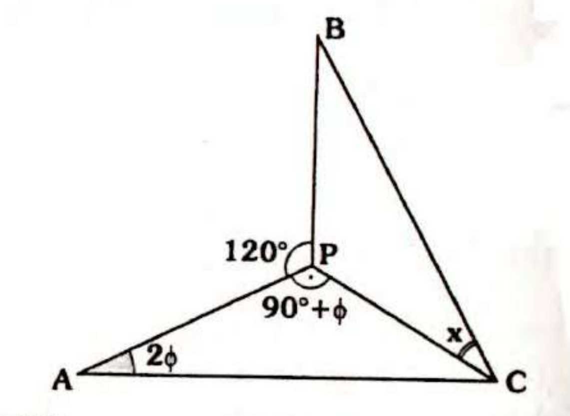
Si $m\measuredangle BAM = m\measuredangle NBC = 15°$ y $m\measuredangle MCQ = 28°$

Calcule $m\measuredangle LBN$

A) 11° B) 28° C) 15°
D) 43° E) 14°

PROBLEMA Nº 199

En el gráfico, $BP = AC$, calcule x.



A) 30° B) 15° C) 18°
D) 45° E) 36°

PROBLEMA Nº 200

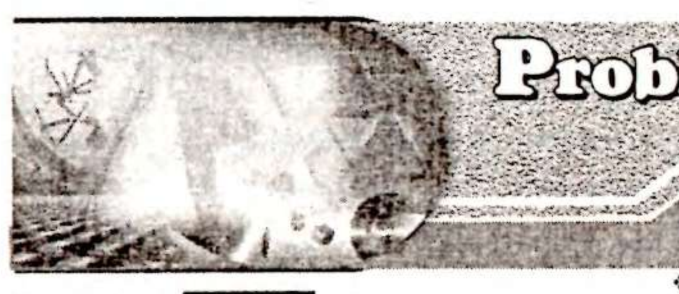
Se tiene el triángulo ABC, en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ se ubican P y Q de modo que:

$$\frac{m\measuredangle BAC}{m\measuredangle QBC} = \frac{m\measuredangle BCA}{m\measuredangle ABP} = \frac{m\measuredangle ABQ}{m\measuredangle ACQ} = \frac{m\measuredangle PBC}{m\measuredangle PAC} = 1$$

Si AC=9 y $(AB + BC)$ es mínimo entero.

Calcule el máximo valor entero de PQ

A) 18 B) 19 C) 17
D) 8 E) 16

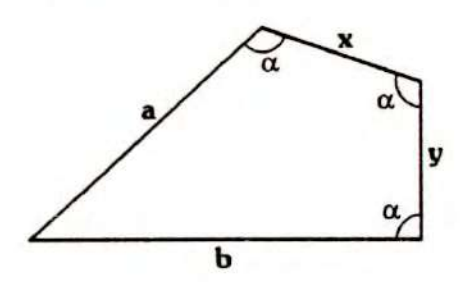


Problemas Propuestos

Ciclo Semestral Intensivo

PROBLEMA Nº 201

En el gráfico, $90° < \alpha < 120°$, indique la alternativa correcta.



A) $xy > ab$ B) $xy < ab$

C) $x^2 + y^2 < a^2 + b^2$ D) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

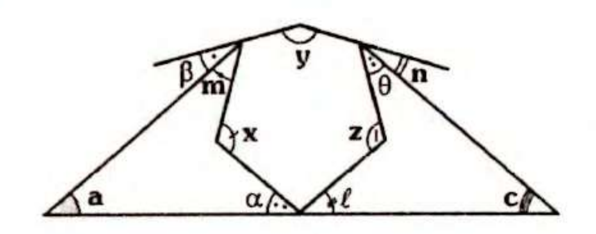
E) $xy = ab$

PROBLEMA Nº 202

En el gráfico:

$$m + n + \ell = 60° \quad y \quad \alpha + \theta + \beta = 40°$$

Calcule $x + y + z$

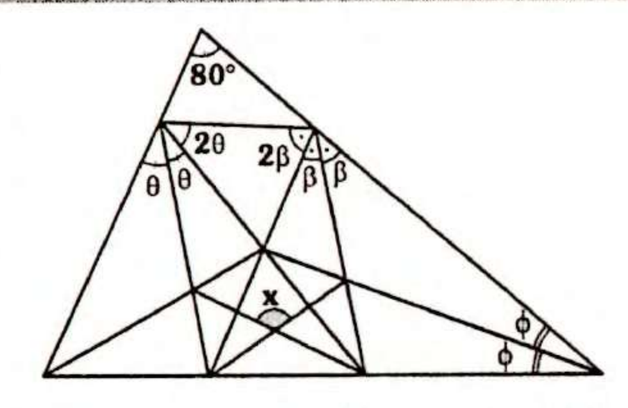


A) 200° B) 280° C) 240°

D) 300° E) 220°

PROBLEMA Nº 203

Del gráfico calcule x.



A) 115° B) 105° C) 120°

D) 140° E) 135°

PROBLEMA Nº 204

Se tiene el triángulo ABC, se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$.

Si $m\measuredangle BCA = 30°$; $m\measuredangle ABD = 60°$;

$m\measuredangle BAC = 48°$ y $m\measuredangle DAC = 12°$

Calcule $m\measuredangle BDC$.

A) 84° B) 96° C) 98°

D) 104° E) 102°

PROBLEMA Nº 205

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD y la bisectriz interior CN. Si $m\measuredangle BNC$ toma su mayor valor entero par y los ángulo ABD y ABC son suplementarios.

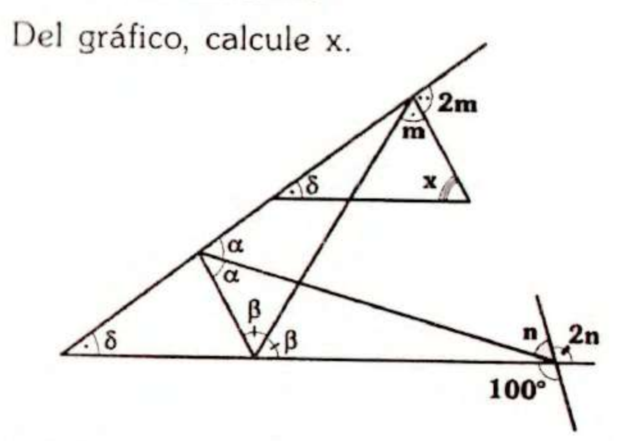
Calcule $m\measuredangle BDA$.

A) 6° B) 8° C) 4°

D) 5° E) 7°

PROBLEMA Nº 206

Del gráfico, calcule x.



A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 100°

PROBLEMA Nº 207

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AP tal que:

$$m\measuredangle PAC = \frac{m\measuredangle BAP}{3} = \frac{m\measuredangle PCA}{2} \quad y$$

$$AC = BP + PC$$

Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 72° B) 60° C) 78°
D) 36° E) 45°

PROBLEMA Nº 208

En el triángulo ABC, se ubican P, Q y R en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $m\measuredangle PRQ = 60°$, AR=RP y RQ = RC.

Calcule la medida del ángulo entre la bisectriz interior trazada de P y la exterior trazada de Q para el triángulo PBQ.

A) 30° B) 20° C) 15°
D) 60° E) 45°

PROBLEMA Nº 209

Se tiene el triángulo isósceles ABC ($\overline{AC}$: base), se ubican M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Si : AM = MN = AC y $m\measuredangle AMN = 60°$

Calcule: $m\measuredangle ACB - m\measuredangle ABC$

A) 30° B) 60° C) 45°
D) 36° E) 72°

PROBLEMA Nº 210

En el triángulo ABC se ubica P exterior y relativo a $\overline{BC}$ y en la prolongación de $\overline{PC}$ el punto Q tal que $m\measuredangle BCP = m\measuredangle ACQ$ y $2(m\measuredangle APC) = m\measuredangle ABC$. Luego se ubica el punto R en $\overline{AC}$ tal que:

$$m\measuredangle ABR = m\measuredangle ACB \quad y \quad m\measuredangle RBC = 40°$$

Calcule la medida del ángulo entre $\overrightarrow{AP}$ y una recta perpendicular a $\overline{BR}$.

A) 10° B) 18° C) 20°
D) 22,5° E) 30°

PROBLEMA Nº 211

En el triángulo ABC(AB = BC), se cumple que $m\measuredangle ABC$ toma su mayor valor entero. Calcule la medida del ángulo entre la altura relativa a $\overline{AC}$ y la bisectriz exterior AM (M en la prolongación de $\overline{BC}$).

A) 30°15' B) 45° C) 30°
D) 15° E) 22°30'

PROBLEMA Nº 212

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se traza la ceviana interior AM, tal que AM=AC.

Calcule la diferencia del mayor y menor entero de $m\measuredangle AMC$.

A) 27° B) 29° C) 28°
D) 30° E) 31°

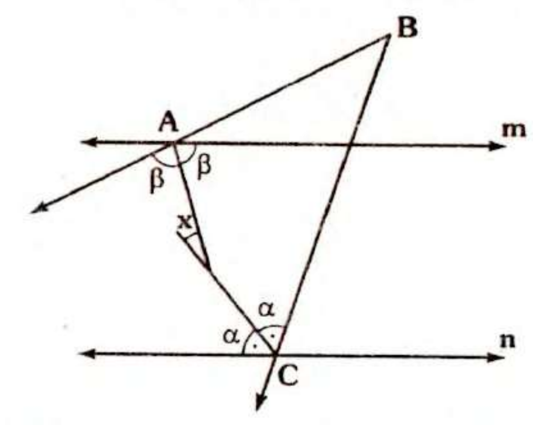
PROBLEMA Nº 213

En el triángulo ABC (recto en B), exteriormente se traza el triángulo equilátero BCD, se ubica M en $\overline{AC}$ tal que $\overline{MD} \cap \overline{BC} = \{N\}$, si $MC = DC$ y $m\measuredangle BAC = m\measuredangle BNM$. Calcule $m\measuredangle BAC$

A) 60° B) 70° C) 80°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 214

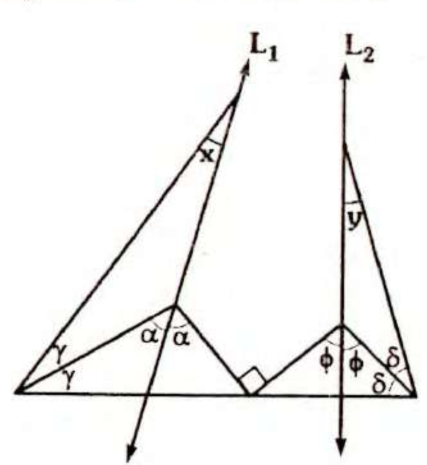
En el gráfico $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$ y $\measuredangle ABC$ es agudo. Calcule el mayor valor entero de x.



A) 30° B) 44° C) 46°
D) 59° E) 61°

PROBLEMA Nº 215

En el gráfico, la medida del ángulo entre $\overrightarrow{L_1}$ y $\overrightarrow{L_2}$ es θ. Calcule x + y



A) θ B) $\frac{3}{2}\theta$ C) 2θ
D) 3θ E) $\frac{5}{2}\theta$

PROBLEMA Nº 216

En el triángulo acutángulo ABC se ubica L exterior y relativo a $\overline{BC}$ tal que:

$$m\measuredangle BAL = 2(m\measuredangle LAC) \quad ;$$
$$m\measuredangle BCE = 3(m\measuredangle LCE)$$

E se encuentra en la prolongación de $\overline{AC}$. Calcule el mayor valor entero de $m\measuredangle ALC$

A) 31° B) 44° C) 46°
D) 29° E) 14°

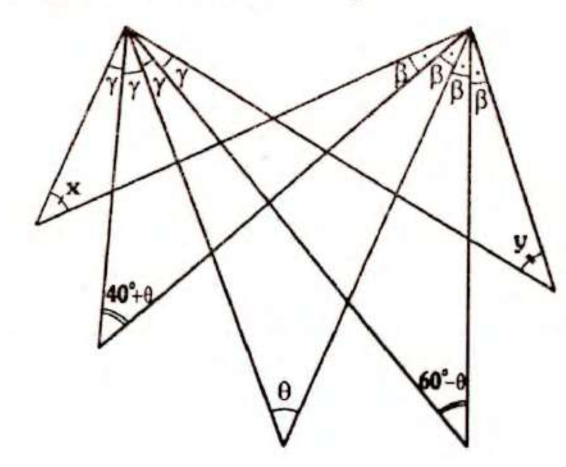
PROBLEMA Nº 217

En el triángulo ABC(AB = BC), la bisectriz interior y exterior trazadas desde A y C respectivamente, las cuales se cortan en E. Si AB=8, calcule la suma entre el mayor y menor entero de AE.

A) 20 B) 16 C) 27
D) 24 E) 25

PROBLEMA Nº 218

Del gráfico, calcule x + y.



A) 60° B) 40° C) 50°
D) 30° E) 100°

PROBLEMA Nº 219

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AP y CQ tal que $AP = AC$; $AQ = QC = BC$ y $m\sphericalangle BAP = \frac{3}{2} m\sphericalangle PAC$. Calcule $m\sphericalangle QAC$.

A) 32° B) 34° C) 36°
D) 180°/7 E) 225°/7

PROBLEMA Nº 220

En el triángulo ABC se traza las cevianas interiores BP y CQ, tal que

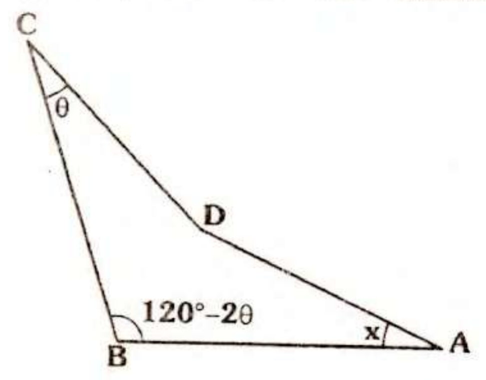
$$m\sphericalangle AQP = m\sphericalangle BQC \ ;$$
$$m\sphericalangle QPA = m\sphericalangle BPC \ ;$$
$$4(m\sphericalangle ABP) = 3(m\sphericalangle BCQ) \quad y$$
$$4(m\sphericalangle QCA) = 3(m\sphericalangle CBP)$$

Calcule $m\sphericalangle BAC$

A) 20° B) 40° C) 30°
D) 35° E) 25°

PROBLEMA Nº 221

En el gráfico, $AB = AD = BC$ calcule x.



A) θ B) 2θ C) 60° − θ
D) 30° + θ E) 30° − θ

PROBLEMA Nº 222

En el triángulo ABC, se ubica P en $\overline{AC}$, R en $\overline{CP}$ y Q en $\overline{BC}$.
Si: $AB = BP = PQ = QR = RC$ y $m\sphericalangle ACB$ es el mayor valor entero par, calcule $m\sphericalangle ABP$.

A) 4° B) 2° C) 6°
D) 3° E) 5°

PROBLEMA Nº 223

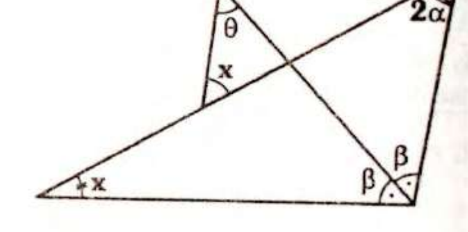
En el triángulo ABC (obtuso en B) se cumple que $(AB)^2 + (BC)^2 = 100$, se traza el triángulo equilátero AEC, calcule la diferencia de perímetros enteros máximo y mínimo de AEC.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 7

PROBLEMA Nº 224

Del gráfico, calcule x.

A) 30°
B) 36°
C) 34°
D) 60°
E) 44°



PROBLEMA Nº 225

En los lados AC y BC del triángulo ABC se ubican M y N tal que $NC = AM = AB$, si $m\sphericalangle ABC = 80°$ y $m\sphericalangle BCA = 40°$. Calcule $m\sphericalangle NMC$

A) 80° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 170°

PROBLEMA Nº 226

En la región exterior rativa a $\overline{AB}$ del triángulo ABC se ubica), tal que:

$AD = AB$; $AC = B + BD$ y

$m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle ACI = 2(m\measuredangle BAD)$

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 30° B) 45° C) 72°
D) 48° E) 34°

PROBLEMA Nº 227

En el triángulo ABC setraza la ceviana interior BD, tal que $m\measuredangle BAD = 40°$; $CD = AB + BD$ y $m\measuredangle DC = 3(m\measuredangle BCA)$. Calcule $m\measuredangle BCA$

A) 18° B) 20° C) 22°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº 228

En el triángulo ABC en región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica tal que:

$AB = AP = BC$; $m\measuredangle PAC = 16°$ y

$m\measuredangle ABC = 28°$

Calcule $m\measuredangle APC$

A) 14° B) 15° C) 16°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 229

En un triángulo ABC se bica D y P en la región exterior relativo a $\overline{BC}$ tal que $\overrightarrow{CP}$ y $\overrightarrow{AP}$ son bisectrices de s ángulos DCE y DAC respectivamente E en la prolongación de $\overline{AC}$). Si $B = BC = BD$ y $m\measuredangle ABC = 30°$. Calcule $m\measuredangle APC$.

A) 5° B) 10° C) 7,5°
D) 12,5° E) 30°

PROBLEMA Nº 230

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM tal que: AM=BC ;

$m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle ACB) = 2\alpha$ y

$m\measuredangle ABM = 90° + \alpha$.

Calcule α.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 18° E) 36°

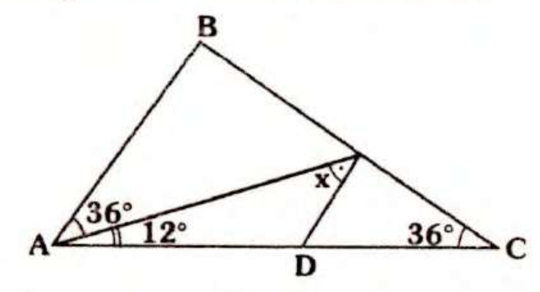
PROBLEMA Nº 231

En el interior del triángulo ABC se ubica P, tal que PB=PC; $m\measuredangle PCA = 30°$ y $m\measuredangle PAC = 40°$, la prolongación de $\overline{BP}$ interseca a $\overline{AC}$ en el punto T tal que AP=TC. Calcule $m\measuredangle PCB$.

A) 10° B) 12° C) 25°
D) 18° E) 30°

PROBLEMA Nº 232

En el gráfico AB=AD. Calcule x.



A) 18° B) 24° C) 30°
D) 38° E) 36°

PROBLEMA Nº 233

En el triángulo ABC, las bisectrices del ángulo exterior de vértice C y del ángulo BAC se cortan en P. Si las bisectrices de los ángulos ABC y APC se cortan en Q, tal que:

$\overline{QB} \cap \overline{AC} = \{R\}$ y $m\measuredangle QBP = 2(m\measuredangle BRA)$

Calcule $m\measuredangle BRA$.

A) 18°　　B) 27°　　C) 45°
D) 36°　　E) 24°

PROBLEMA Nº 234

En el triángulo ABC se traza la bisectriz exterior BD $(AB > BC)$ y en la prolongación de $\overline{BA}$ se ubica el punto L. Si $m\measuredangle BDC = 40°$, calcule :

$$m\measuredangle LAC + m\measuredangle ACB$$

A) 200°　　B) 240°　　C) 260°
D) 220°　　E) 225°

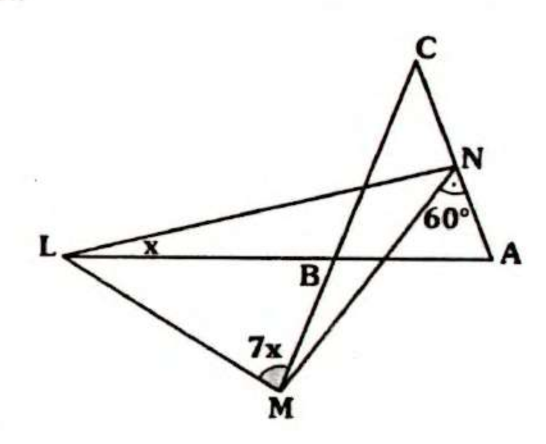
PROBLEMA Nº 235

En el triángulo ABC se trazan la ceviana interior BE y la bisectriz interior CD, las cuales se cortan en F. Si AB=AE y $m\measuredangle ABC = m\measuredangle BFC$, calcule $m\measuredangle EFC$

A) 45°　　B) 90°　　C) 75°
D) 60°　　E) 72°

PROBLEMA Nº 236

En el gráfico, AC=BC y MN=ML, calcule x.

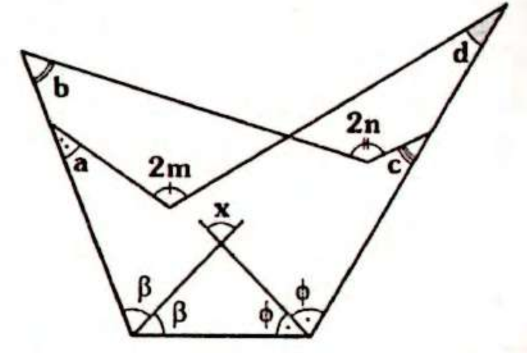


A) 8°　　B) 12°　　C) 14°
D) 10°　　E) 16°

PROBLEMA Nº 237

En el gráfico, $a + b + c + d = 160°$ y $m + n = 160°$

Calcule x.



A) 40°　　B) 50°　　C) 70°
D) 80°　　E) 90°

PROBLEMA Nº 238

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AN y la altura BH del triánguo ABN, tal que:

$$NC > BN \ ; \ m\measuredangle ABC = 120 \ ;$$
$$m\measuredangle HBN = \alpha \ \text{ y } \ m\measuredangle NAC = \alpha - 30'$$

Calcule el menor valor entero de α.

A) 20°　　B) 19°　　C) 18°
D) 31°　　E) 35°

PROBLEMA Nº 239

En el triángulo equilátero ABC en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ se ubica D tal que :

$$m\measuredangle ADC = 30° \ \text{ y } \ m\measuredangle DCB = 50°$$

Calcule $m\measuredangle DBA$

A) 10°　　B) 20°　　C) 30°
D) 15°　　E) 18°

PROBLEMA Nº 240

En un triángulo ABC, se ubican D y E en $\overline{AC}$ y en la prolongación de $\overline{AB}$ respecti-

vamente.

Si $BE = BC = DC$; $m\sphericalangle ACB = 10°$ y $m\sphericalangle BAC = 50°$

Calcule $m\sphericalangle AED$.

A) 8° B) 9° C) 10°
D) 5° E) 15°

PROBLEMA Nº 241

Dado el triángulo ABC, en la región exterior relativos a los lados AC y BC se ubican los puntos N y Q respectivamente, tal que N, C y Q son colineales.

Si : $m\sphericalangle BAQ = m\sphericalangle QAC$;

$m\sphericalangle ACN = 3(m\sphericalangle BCQ)$ y

$2(m\sphericalangle BCQ) + m\sphericalangle ABC = 100°$

Calcule $m\sphericalangle AQN$.

A) 25° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 80°

PROBLEMA Nº 242

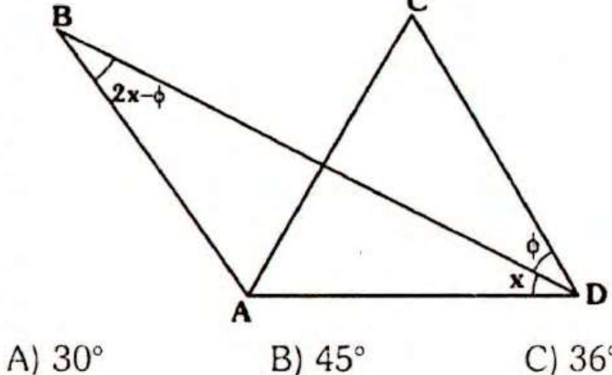
En el triángulo isósceles ABC de base AC, se traza la ceviana interior BM y en el triángulo MBC la bisectriz interior BN. Calcule la razón entre la medida del ángulo ABM con la medida del menor ángulo entre $\overleftrightarrow{AC}$ y una recta perpendicular a $\overline{BN}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 3/2 E) 4/3

PROBLEMA Nº 243

En el gráfico: $AB = AC = CD$

Calcule x.



A) 30° B) 45° C) 36°
D) 18° E) 22,5°

PROBLEMA Nº 244

Dado el triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos E y D respectivamente.

Si $m\sphericalangle ABC = 30°$ y

$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle BCE = m\sphericalangle DAC + m\sphericalangle ECA$

Calcule la medida del ángulo determinado por las bisectrices de los ángulo AEC y ADC.

A) 25° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 245

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AD y BE tal que $AB = BE$; $AD = DC$: $m\sphericalangle DAC = m\sphericalangle ABE = \phi$ y $m\sphericalangle EBC = 6\phi - 120°$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$.

A) 103° B) 104° C) 105°
D) 106° E) 107°

PROBLEMA Nº 246

En el interior del triángulo ABC se ubica el punto D, de modo que $AD = DC = BC$.

Si $m\sphericalangle BAD = 3x$; $m\sphericalangle DCB = 8x$ y

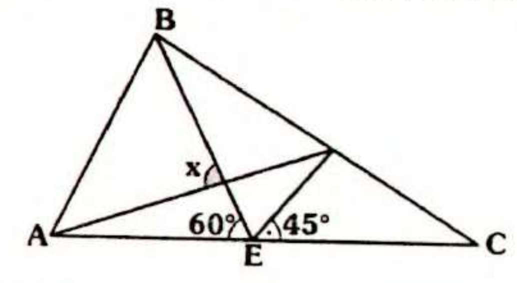
$m\sphericalangle DCA = 45° - 5x$.

Calcule x.

A) 5°　　B) 6°　　C) 7,5°
D) 8°　　E) 10°

PROBLEMA Nº 247

En el gráfico, $AB = BE = EC$, calcule x.



A) 90°　　B) 82,5°　　C) 75°
D) 67,5°　　E) 97,5°

PROBLEMA Nº 248

En el triángulo $ABC (AC = CB)$ se ubica P en la región interior tal que:

$m\measuredangle BAP = 30°$, $m\measuredangle PAC = 2\theta$ y

$m\measuredangle PBC = \theta$

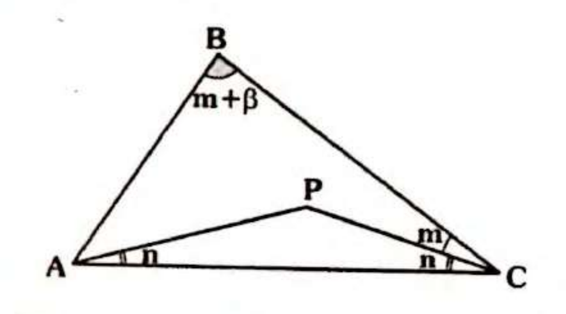
Calcule $m\measuredangle PCB$

A) $30° - \theta$　B) θ　C) $\theta/2$
D) $30° + \theta$　E) $45° - 2\theta$

PROBLEMA Nº 249

En el gráfico, $AB = PC$ y $\beta = 2(m + n)$.

Calcule β.



A) 45°　　B) 60°　　C) 90°
D) 75°　　E) 30°

PROBLEMA Nº 250

En el exterior de un triángulo ABC y relativo a $\overline{BC}$ se ubica P, tal que $AB = BC = AP = BP$, si $m\measuredangle PAC = 12°$. Calcule $m\measuredangle APC$.

A) 16°　　B) 18°　　C) 15°
D) 20°　　E) 22,5°

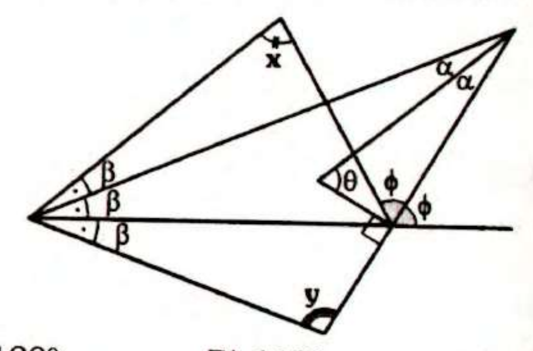
PROBLEMA Nº 251

En el triángulo AFD se trazan las cevianas interiores AC y DB secantes en S. Si $AB = BC = CD$ y $m\measuredangle ASD = 3(m\measuredangle AFC)$. Calcule $m\measuredangle AFC$.

A) 36°　　B) 30°　　C) 60°
D) 45°　　E) 72°

PROBLEMA Nº 252

En el gráfico, $\beta + \theta = 110°$. Calcule $x + y$.



A) 120°　　B) 110°　　C) 135°
D) 125°　　E) 140°

PROBLEMA Nº 253

En el triángulo isósceles ABC de base AC se trazan las cevianas interiores AM y CN, las cuales se cortan en R y en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ se ubica Q, tal que:

$m\measuredangle MRC = m\measuredangle BAC$;

$m\measuredangle ANQ = 2(m\measuredangle AMQ)$ y

$m\measuredangle QMC = 2(m\measuredangle QNC)$

Calcule m∢NQM .

A) 36° B) 45° C) 60°
D) 54° E) 72°

PROBLEMA Nº 254

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BF, tal que m∢BAC = 4° ; AB < FC y BC = FC, calcule el valor entero de 2(m∢ABF) .

A) 188° B) 186° C) 169°
D) 184° E) 189°

PROBLEMA Nº 255

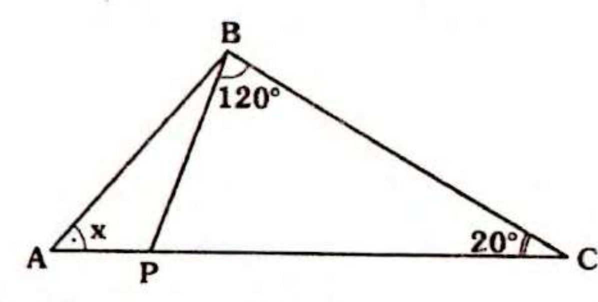
En el triángulo ABC se ubica en la región interior P, si BP = AC ; m∢ACP = 18° ; m∢PAC = 48° y m∢APB = 120° .

Calcule m∢PBC .

A) 12° B) 18° C) 20°
D) 24° E) 30°

PROBLEMA Nº 256

En el gráfico, AC = PB + BC , calcule x.



A) 10° B) 30° C) 30°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA Nº 257

En el triángulo ABC, en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica Q, a partir del cual se traza una recta que corta a $\overline{BC}$ en E y a $\overline{AB}$ en D. Si AQ = AB = QD y m∢BCQ = 134° . Calcule el mayor valor entero m∢ABC .

A) 65° B) 41° C) 43°
D) 45° E) 46°

PROBLEMA Nº 258

Se tiene un triángulo rectángulo isósceles ABC, su base es $\overline{AC}$, se ubica P en la región interior tal que :

$$\frac{m∢PBC}{3} = \frac{m∢BAP}{2} = m∢PCA$$

Calcule m∢ACP

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 259

En el triángulo rectángulo (recto B), se ubica P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si AP = PQ ; m∢BAC = 40° y m∢PQB = 70° . Calcule m∢PCB

A) 15° B) 20° C) 225°
D) 30° E) 25°

PROBLEMA Nº 260

En el triángulo sus lados miden a, b y c; y el semiperímetro de la región triangular es p. Calcule el máximo:

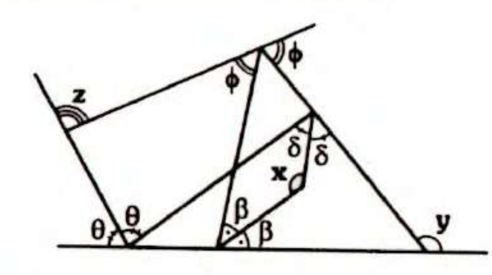
$$(p-a)(p-b)(p-c)$$

A) p^3 B) $\frac{p^3}{27}$ C) $3p^3$
D) $\frac{p^3}{3}$ E) $2p^3$



PROBLEMA Nº 261

Del gráfico, calcule $x+y+z$.



A) 180°　　B) 270°　　C) 240°
D) 260°　　E) 360°

PROBLEMA Nº 262

Se tiene el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se ubican los puntos E y D en la prolongación de $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ respectivamente. Si DB=BC y

$$m\measuredangle BAC + m\measuredangle ECB = 12(m\measuredangle ABD).$$

Calcule $m\measuredangle ACD$.

A) 15°　　B) 16°　　C) 30°
D) 20°　　E) 7,5°

PROBLEMA Nº 263

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un triángulo equilátero es un triángulo acutángulo.

II. En todo triángulo, la longitud de cualquier lado es menor que el semiperímetro.

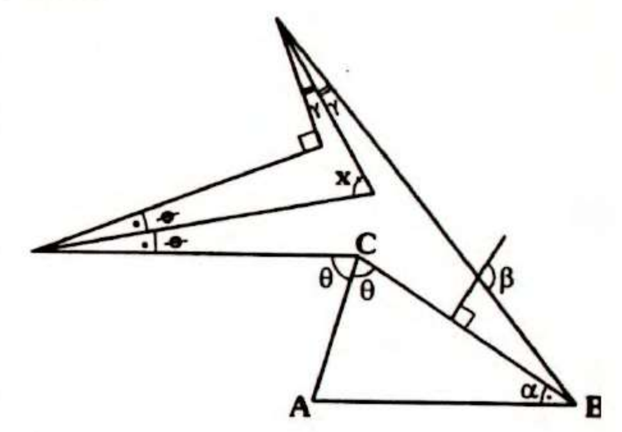
III. Existe un sólo triángulo obtusángulo cuyos lados tienen longitudes enteras consecutivas.

IV. La base de un triángulo isósceles siempre es mayor que un lado lateral.

A) VFFV　　B) VFVF　　C) VVVV
D) VVVF　　E) FFVV

PROBLEMA Nº 264

En el gráfico, AB=BC y $\alpha+\beta=130°$, calcule x.



A) 65°　　B) 75°　　C) 85°
D) 50°　　E) 70°

PROBLEMA Nº 265

En el triángulo APQ en las prolongaciones de $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{CB}$ se ubican los puntos B, C, S y L respectivamente de modo que:

$$PB + PQ = 10 \quad y$$

$$m\measuredangle CQS = m\measuredangle LBA + m\measuredangle LCA$$

Calcule el menor valor entero de QC.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

PROBLEMA Nº 266

En el triángulo ABC se traza la ceviana exterior BE (E en la prolongación de $\overline{CA}$).

Si $AE = AB + BC$ y

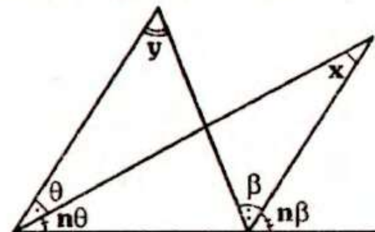
$$m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$$

Calcule la razón de las medidas de los ángulos BEA y EBA.

A) 1 B) 1/3 C) 1/2
D) 1/4 E) 1/5

PROBLEMA Nº 267

Del gráfico, calcule x en función de n e y.



A) $\frac{y}{n}$ B) $\frac{y}{n+1}$ C) $\frac{ny}{n+1}$

D) $\frac{y}{2n-1}$ E) $\frac{y}{2n}$

RESOLUCIÓN Nº 268

En el triángulo ABC, se cumple que AB=6, BC=8 y

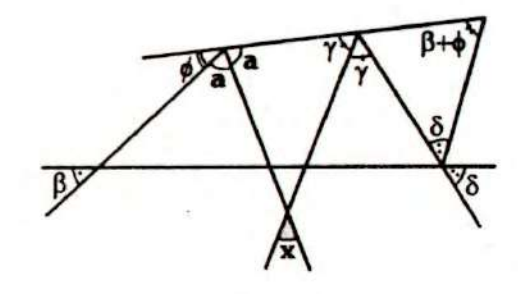
$$m\measuredangle BAC + m\measuredangle BCA < 90°$$

Calcule el valor entero par de AC.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 6

PROBLEMA Nº 269

Del gráfico, calcule x.



A) 50° B) 60° C) 30°
D) 75° E) 45°

PROBLEMA Nº 270

En el triángulo acutángulo ABC, se cumple $m\measuredangle ABC = 4x$ y $m\measuredangle BAC = 2x + 38°$. Si x toma su mayor valor entero. Calcule $m\measuredangle BCA$

A) 22° B) 15° C) 10°
D) 18° E) 16°

PROBLEMA Nº 271

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AM y CN secantes en P, si AP=3, AC=12 y PC toma su mayor valor entero. Calcule el menor valor entero de AB+BC.

A) 14 B) 12 C) 15
D) 16 E) 18

PROBLEMA Nº 272

Dado el triángulo ABC, se ubican los puntos P y Q en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $AB = BQ$ y $PC = QC$, si los ángulos ABQ y PCQ son complementarios. Calcule $m\measuredangle BQP$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 273

En el triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores BD y BE (E en $\overline{CD}$), tal que DB=DA; EB=EC y $m\measuredangle DBE = 20°$. Calcule la medida de ángulo entre las bisectrices de los ángulos BAC y BCA.

A) 140° B) 150° C) 160°
D) 120° E) 170°

PROBLEMA Nº 274

En un triángulo $ABC(AB = BC)$, se ubica E y D en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, si $AC = CE = ED = BD$. Calcule $\frac{m\measuredangle ABC}{m\measuredangle ACE}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

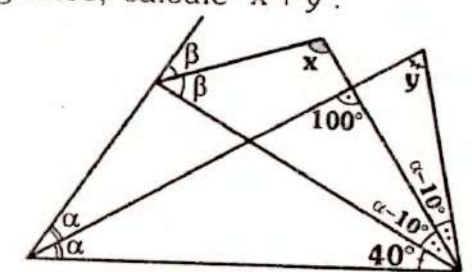
PROBLEMA Nº 275

Se tiene un ángulo BAD, se ubica en la región interior el punto C, si $m\measuredangle BAD = 80°$; $m\measuredangle ADC = 60°$; BC=CD y AD=AB+CD. Calcule $m\measuredangle BCD$.

A) 100° B) 110° C) 120°
D) 140° E) 130°

PROBLEMA Nº 276

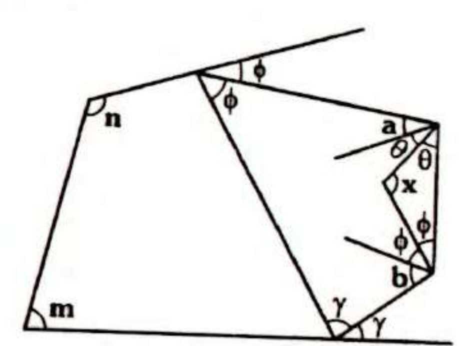
Del gráfico, calcule $x + y$.



A) 200° B) 205° C) 210°
D) 220° E) 215°

PROBLEMA Nº 277

En el gráfico $m + n = 260°$ y $a + b = 120°$. Calcule x.



A) 105° B) 95° C) 115°
D) 125° E) 135°

PROBLEMA Nº 278

Se tiene el triángulo ABC en el cual se traza la bisectriz interior BJ en cuya prolongación se ubica E, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica D, tal que $\overline{ED}$ corta a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en N e I respectivamente.

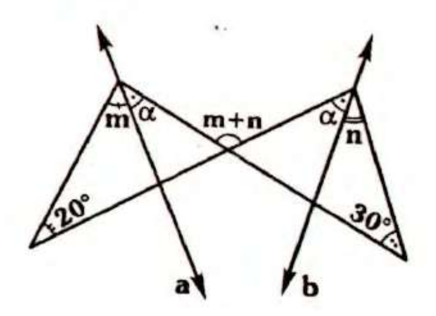
Si: $m\measuredangle CBD = m\measuredangle ABJ$ y
$m\measuredangle BDI = m\measuredangle ACB$

Calcule $m\measuredangle AJB + m\measuredangle BID$.

A) 90° B) 120° C) 180°
D) 150° E) 270°

PROBLEMA Nº 279

Del gráfico, calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$.



A) 50° B) 40° C) 25°
D) 70° E) 60°

PROBLEMA Nº 280

En el triángulo equilátero ABC, se ubica P en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ de modo que:

$$AP = AC \quad y \quad m\sphericalangle BCP = 2(m\sphericalangle PBC)$$

Calcule $m\sphericalangle PBC$.

A) 5° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 18°

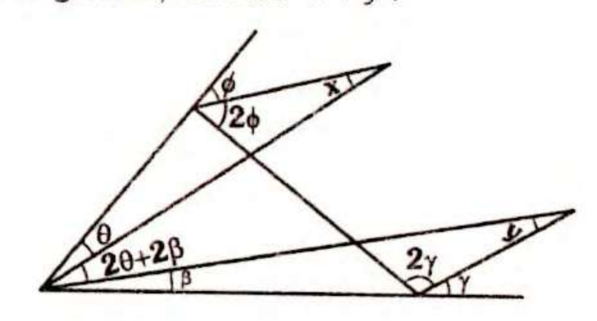
PROBLEMA Nº 281

En la región exterior relativa a $\overline{AC}$ del triángulo ABC, se ubica D, tal que $AB = BD = DC$ y $m\sphericalangle ABD = 2(m\sphericalangle ACD)$. Calcule $m\sphericalangle CAD$

A) 20° B) 10° C) 30°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 282

Del gráfico, calcule $x + y$.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 50° E) 70°

PROBLEMA Nº 283

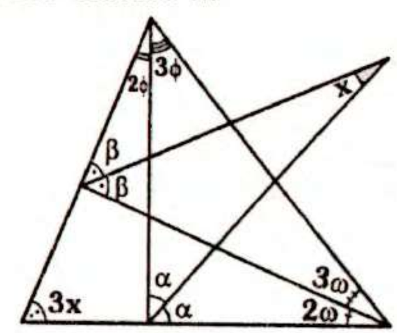
Sean $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ cevianas interiores del triángulo ABC, tal que $AB = BN$ y $AM = MC$. Si $\overline{BN} \cap \overline{AM} = \{L\}$.

Calcule $m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle MLN$

A) 90° B) 180° C) 240°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 284

Del gráfico calcule x.



A) 15° B) 30° C) 22°30'
D) 32°30' E) 37°30'

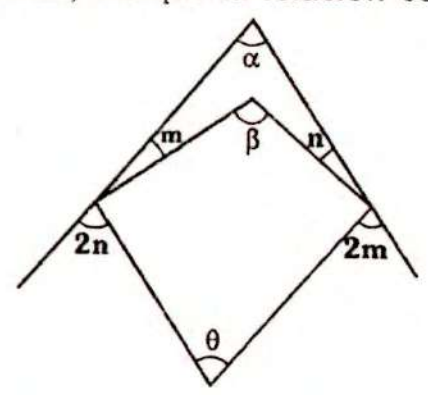
PROBLEMA Nº 285

En un triángulo ABC se cumple $BC = AB + k(k \in \mathbb{R}^+)$ y $m\sphericalangle ABC = 111°$, calcule el mayor valor entero del menor ángulo interior del triángulo.

A) 31° B) 29° C) 33°
D) 34° E) 36°

PROBLEMA Nº 286

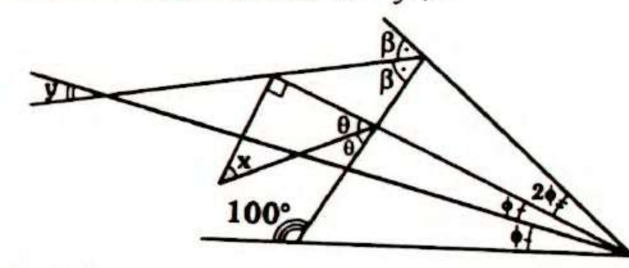
Del gráfico, indique la relación correcta:



A) $2\beta = 3\alpha - \theta$ B) $2\beta = \alpha + \theta$
C) $2\beta = 3\alpha + \theta$ D) $\beta = 2\alpha - \theta$
E) $3\beta = 4\alpha - \theta$

PROBLEMA Nº 287

Del gráfico, calcule $x-y$.



A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

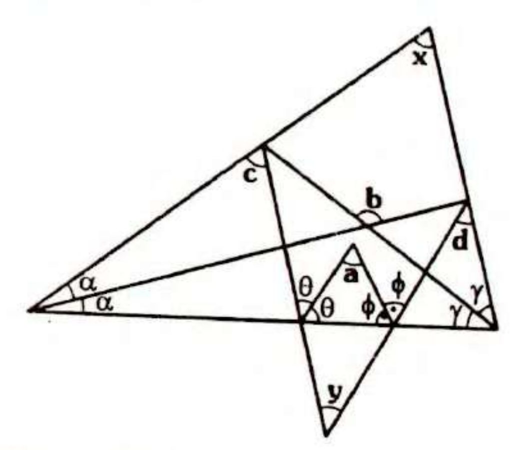
PROBLEMA Nº 288

Se tiene el triángulo ABC, se ubica M y N en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. La suma de las medidas de los ángulos exteriores en A y B es 220°. Si $\overleftrightarrow{MN}$ corta a la bisectriz exterior trazada desde C en T y CN=NM. Calcule m∢CTN

A) 30° B) 40° C) 50
D) 70° E) 80°

PROBLEMA Nº 289

En el gráfico, $a+b=220°$ y $c+d=140°$, calcule "x" e "y".



A) 110° y 30° B) 120° y 20°
C) 100° y 40° D) 70° y 70°
E) 90° y 50°

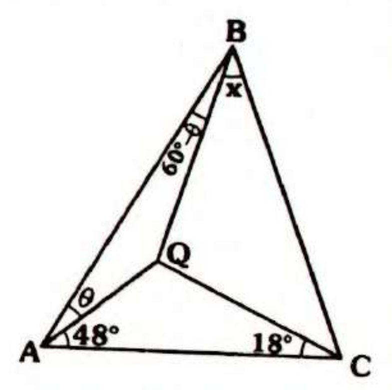
PROBLEMA Nº 290

En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la altura $\overline{BH}$ y las bisectrices interiores $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$ cortan a $\overline{BH}$ en Q y P. Si BD=a y BE=b, calcule PQ (considere b>a)

A) $a-\frac{b}{2}$ B) $b-a$ C) $\sqrt{b^2-a^2}$
D) $\sqrt{ab}$ E) $2b-a$

PROBLEMA Nº 291

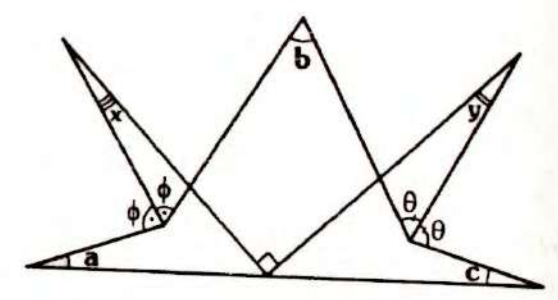
En el gráfico, BQ = AC, calcule **x**.



A) 30° B) 24° C) 26°
D) 36° E) 34°

PROBLEMA Nº 292

Del gráfico, calcule $x+y$ en función de a, b y c.

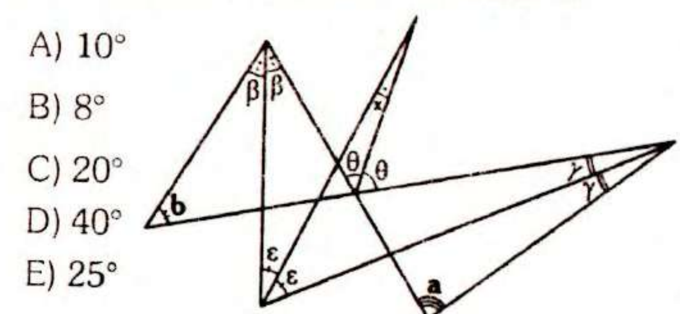


A) $\frac{a+b+c}{2}$ B) $\frac{b-a-c}{2}$
C) $a+b+c$ D) $a+b-c$
E) $a-c-b$

PROBLEMA Nº 293

Del gráfico, $a-b=40°$. Calcule x.

A) 10°
B) 8°
C) 20°
D) 40°
E) 25°



PROBLEMA Nº 294

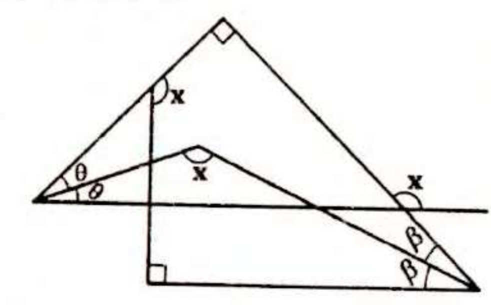
En un triángulo rectángulo ABC se traza la altura BH y la ceviana interior AE secantes en M. Si BE=BM, ¿Qué línea notable es $\overline{AE}$ para el triángulo BAC?

A) Mediana
B) Bisectriz interior
C) Altura
D) Simediana
E) Cualquier ceviana

PROBLEMA Nº 295

Del gráfico, calcule x.

A) 120°
B) 150°
C) 130°
D) 105°
E) 135°



PROBLEMA Nº 296

En el triángulo ABC se cumple $m∢ABC=115°$ y $m∢ACB=45°$. Se ubica P en $\overline{AC}$ y Q en $\overline{BC}$ tal que:

$$m∢PBC=65° \text{ y } m∢QPC=35°$$

Calcule $m∢AQP$.

A) 15°
B) 20°
C) 25°
D) 35°
E) 30°

PROBLEMA Nº 297

En el triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores AN y CM, tal que:

$$m∢BMN=m∢CMA \quad \text{y}$$
$$m∢MNB=m∢ANC$$

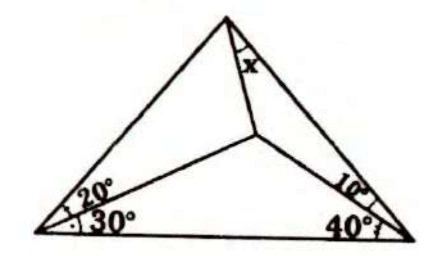
Calcule $m∢ABC$.

A) 60°
B) 75°
C) 80°
D) 36°
E) 48°

PROBLEMA Nº 298

Del gráfico, calcule x.

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 15°
E) 25°



PROBLEMA Nº 299

En el triángulo $ABC(AB=BC)$, se trazan las cevianas interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$, las cuales se cortan en F. Si $m∢ABF=20°$ y $BF=BD$. Calcule $m∢DAC$.

A) 5°
B) 10°
C) 20°
D) 30°
E) 40°

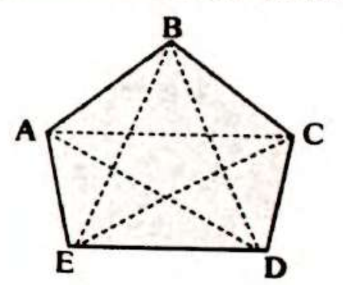
PROBLEMA Nº 300

En el gráfico, el perímetro de la región sombreada es 20cm si:

$$AC=BD=AD=EC=EB$$

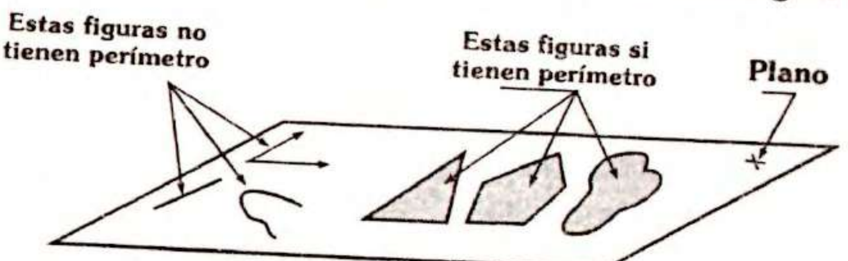
Calcule el mayor valor entero de AC.

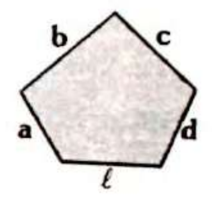
A) 3cm
B) 4cm
C) 5cm
D) 6cm
E) 7cm



ACERCA DEL PERÍMETRO

Se llama perímetro a la longitud del contorno o frontera de una región plana cerrada





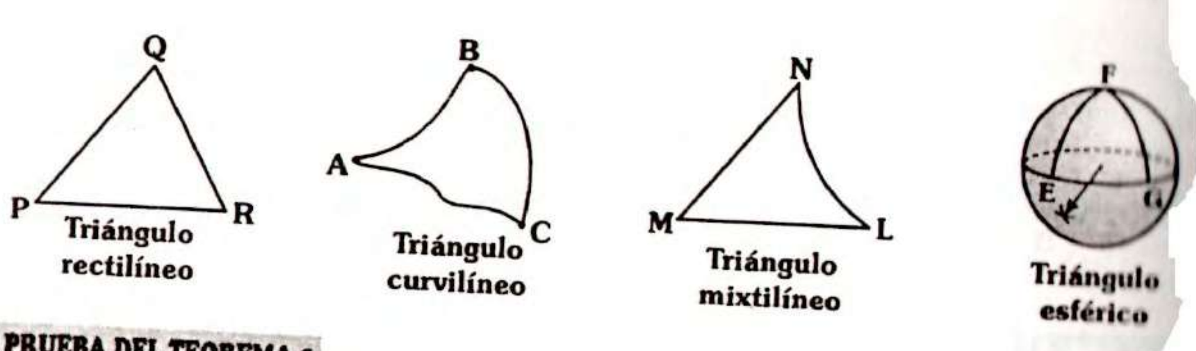
Cuando la región plana y cerrada es poligonal, su perímetro es la suma de las longitudes de sus lados.

$$\text{Perim.}_{\pentagon} = a+b+c+d+\ell$$

OTROS TRIÁNGULOS

Un triángulo en general, se define como la figura formada al unir tres puntos no colineales unidas mediante líneas, las cuales sólo se intersecan en los puntos mencionados.

Asi tenemos:



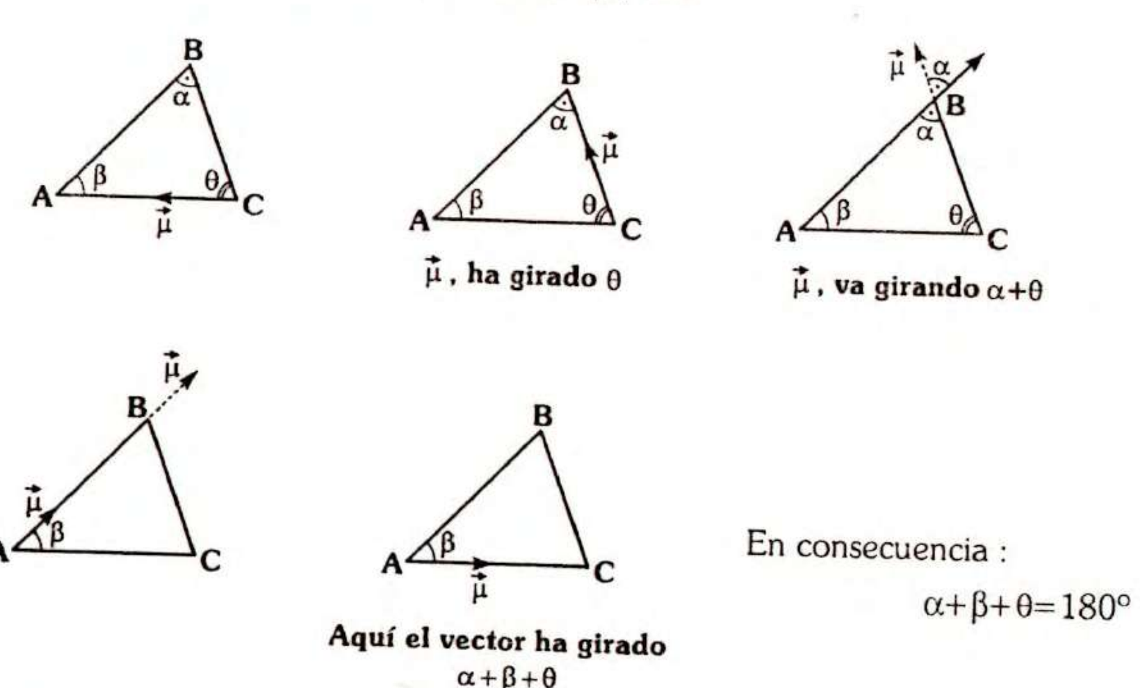
OTRA PRUEBA DEL TEOREMA 1

Se puede partir asi:

Sea el vector "a": $\vec{a}$



Dado el triángulo ABC, asociemos el vector $\vec{\mu}$, asi:



$\vec{\mu}$, **ha girado** θ

$\vec{\mu}$, **va girando** $\alpha+\theta$

Aquí el vector ha girado $\alpha+\beta+\theta$

En consecuencia :

$$\alpha+\beta+\theta=180^\circ$$

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

En matemáticas la verdad esta constituída como la validez de una implicancia de la forma: $H \Rightarrow T$, donde H es el conjunto de hipotesis y T es la conclusión a la cual se debe llegar. Esta implicancia está regida por el principio filosófico "de la verdad no puede seguir la falsedad". Este principio constituye la fundamentación del método de demostración denominado "directo".

Si ahora consideramos dos teoremas para los cuales la tesis de uno de ellos es la hipótesis del otro y viceversa; se les llama a ellos **TEOREMAS RECÍPROCOS**. La certeza de un teorema no implica la certeza de su recíproco.

Dos teoremas se llaman contrarios cuando la hipótesis y la tesis del uno son las negaciones respectivas de la hipótesis y la tesis del otro. La certeza de un teorema no implica la del contrario.

Dos teoremas se llaman contrarecíprocos cuando cada uno de ellos es el contrario del recíproco (o recíproco del contrario) del otro.

Es muy frecuente en matemáticas demostrar un teorema probando su contrarrecíproco. Este método de demostración se llama demostración por reducción al absurdo.

Método de inducción matemática.

Se denomina inducción a todo razonamiento que comprende el paso de proposiciones partículares a generales con la particularidad de que la validez de las últimas se deduce de la validez de las primeras.

El principio de inducción matemáticas establece que para un subconjunto de enteros positivos S $(S \subset \mathbb{N})$ tal que:

a) El número 1 pertenece a $S(1 \in S)$

b) $m \in S \Rightarrow m+1 \in S$

entonces S coincide con todo el conjunto de los enteros positivos, es decir: "$S \in N$"

A la hipótesis $m \in S$, se le conoce con el nombtre de hipótesis inductiva.

DESIGUALDADES ENTRE MEDIAS

Si $0 < a \leq b$, entonces:

$$a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b$$

la igual es válida si sólo a=b

Generalizando para el conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de números positivos se verifica

$$\text{mín}(a_1, a_2, ...a_n) \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}\right)} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=a}^{n}(a_i)^2}{n}} \leq \text{máx}(a_1, a_2, ...a_n)$$

Donde:

- La media armónica: $H = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$

- La media geométrica: $G = \sqrt[n]{a_1\, a_2\, a_3 ... a_n}$

- La media aritmética: $M = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$

- La media cuadrática: $R = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + .. + a_n^2}{n}}$

Así como el método de inducción, los teoremas sobre desigualdades también son utilizados en geometría.

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. A	10. D	19. B	28. B	37. C	46. C	55. A
2. D	11. C	20. C	29. D	38. D	47. C	56. D
3. D	12. E	21. A	30. B	39. E	48. B	57. B
4. E	13. E	22. C	31. C	40. C	49. B	58. A
5. C	14. C	23. B	32. C	41. B	50. C	59. B
6. A	15. C	24. B	33. B	42. D	51. B	60. B
7. C	16. C	25. E	34. A	43. D	52. B	
8. C	17. C	26. A	35. C	44. B	53. A	
9. E	18. C	27. C	36. D	45. B	54. A	

CEPRE-UNI

61. E	71. B	81. D	91. E	101. E	111. D	121. D	131. A
62. E	72. E	82. B	92. C	102. B	112. D	122. D	132. D
63. C	73. B	83. D	93. A	103. A	113. C	123. B	133. A
64. A	74. D	84. E	94. D	104. C	114. A	124. B	134. C
65. D	75 C	85. A	95. D	105. B	115. B	125. A	135. D
66. B	76. B	86. C	96. B	106. D	116. B	126. C	136. B
67. E	77. B	87. C	97. C	107. C	117. D	127. A	137. *
68. D	78. D	88. E	98. C	108. B	118. C	128. D	138. *
69. C	79. E	89. A	99. B	109. C	119. D	129. A	139. *
70. E	80. E	90. E	100. B	110. B	120. A	130. C	140. *

SEMESTRAL

141. C	150. D	159. B	168. C	177. E	185. C	193. C
142. B	151. B	160. C	169. A	178. E	186. B	194. B
143. A	152. D	161. A	170. B	179. C	187. A	195. A
144. E	153. D	162. B	171. A	180. D	188. D	196. C
145. A	154. D	163. D	172. A	181. C	189. E	197. A
146. C	155. C	164. C	173. A	182. C	190. E	198. D
147. D	156. C	165. A	174. C	183. C	191. B	199. A
148. B	157. B	166. C	175. C	184. C	192. C	200. C
149. D	158. E	167. E	176. E			

* Son preguntas para demostrar

SEMESTRAL INTENSIVO

201. C	210. C	219. E	228. A	237. B	246. C	255. D
202. B	211. D	220. B	229. C	238. D	247. C	256. C
203. A	212. B	221. B	230. B	239. B	248. A	257. A
204. B	213. B	222. A	231. C	240. D	249. B	258. C
205. C	214. C	223. E	232. C	241. C	250. B	259. D
206. D	215. D	224. B	233. C	242. B	251. A	260. B
207. B	216. D	225. B	234. C	243. A	252. E	
208. D	217. D	226. A	235. D	244. D	253. C	
209. B	218. E	227. E	236. B	245.B	254. C	

REPASO

261. E	267. C	273. A	279. C	285. D	291. B	297. D
262. C	268. C	274. A	280. B	286. C	292. B	298. B
263. D	269. E	275. A	281. C	287. A	293. A	299. B
264. A	270. C	276. B	282. C	288. A	294. B	300. E
265. C	271. E	277. D	283. B	289. A	295. E	
266. E	272. B	278. C	284. C	290. B	296. C	



Pedro Puig Adam (1961) Curso de Geometría Métrica. Séptima edición Nuevas gráficas S.A- Madrid

Rey Pastor J. (1931) Elementos de Geometría- Colección Elemental Intuitiva-Madrid.

Yaglom J.M- Golovina L.J (1976) Inducción en la Geometría. Editorial MIR- Moscú

Ediciones Bruño (1967) Geometría Curso Superior- 14va Edición

Lages Elon (2000) La matemática de la enseñanza media- volumen 2 Instituto de Matemática y Ciencias Afines IMCA - Perú

Nicholas Kazarinoff (1961) Geometric Inequalities- Ramdom House The L.W. Singer Company- Moscú

Jaime Escobar Acosta (1990) Elementos de Geometría-Universidad de Antioquía - Dpto de Matemáticas.

Erica Parra Sánchez Miguel Valdivieso Análisis de algunos dobleces de origami mediante cabri geometre - Universidad Pedagógica Nacional - Bógota.

CEPRE-UNJ Recopilación de seminarios, prácticas calificadas y exámenes parciales.

Material Bibliográfico de diferentes Instituciones Preuniversitarias.



Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de Editorial Cuzcano

TRIÁNGULOS



INFORMES
AV. ALFONSO UGARTE Nº1310 Of. 212 - BREÑA
423-8154

Editorial Cuzcano
www.editorialcuzcano.com